Multisemioottinen analyysi matematiikan esimerkkitehtävien tekstilajista

Pro gradu -tutkielma
Kirsi Kontinen
Helsingin yliopiston
suomalais-ugrilainen ja
pohjoismainen osasto
toukokuu 2019

HELSINGIN YLIOPISTO
HELSINGFORS UNIVERSITET
UNIVERSITY OF HELSINKI

Tiedekunta/Osasto – Fakultet/Sektion – Faculty	Laitos – Institution – Department
Humanistinen tiedekunta	Suomalais-ugrilainen ja pohjoismainen osasto

Tekijä – Författare – Author
Kirsi Kontinen

Työn nimi – Arbetets titel – Title
Multisemioottinen analyysi matematiikan esimerkkitehtävien tekstilajista

Oppiaine – Läroämne – Subject
suomen kieli

Työn laji – Arbetets art – Level	Aika – Datum – Month and year	Sivumäärä– Sidoantal – Number of pages
pro gradu -tutkielma	toukokuu 2019	75 + 30 liitesivua

Tiivistelmä – Referat – Abstract

Tutkielmassa tarkastellaan matematiikan esimerkkitehtävien tekstilajia. Esimerkkitehtävien tutkimista perustellaan sillä, että niitä ei ole tutkittu fennistiikassa lainkaan. Tutkimuksen aineisto on koostettu kolmesta lukion matematiikan ensimmäisen yhteisen kurssin oppimateriaalista, ja tarkasteltavaksi niistä on rajattu ensimmäinen lukujonoja käsittelevä alaluku. Tutkimuksessa kerrotaan, kuinka aineiston rajausta on motivoinut se, miten vuonna 2015 julkaistu lukion opetussuunnitelma muuttui edellisestä opetussuunnitelmasta. Aineiston kaikki oppimateriaalit ovat ilmestyneet vuonna 2016. Teoreettisena viitekehyksenä on systeemis-funktionaalinen multisemioottinen analyysi, eli tutkimus kuuluu sosiosemiotiikkaan. Tutkimus on laadullinen, ja käsiteltäviä esimerkkitehtäviä on yhteensä 13 kappaletta.

Esimerkkitehtävien tekstiä tarkastellaan sekä rakenteen että funktioiden kannoilta. Tutkimuksessa yhdistetään useita erilaisia tapoja hahmottaa elementtejä multisemioottisesta tekstistä. Esimerkkitehtävistä erillisiksi osiksi tulkitaan *otsikko*, *ongelman perustiedot*, *direktiivi*, *lasku*, *visuaalistus*, *tulkinta*, *selitys* tai *ohje* sekä *vastaus*. Ensin tutkimuksessa kuvataan, miten luonnollinen kieli, symboliresurssi ja kuvaresurssi rakentavat edellä lueteltuja osia. Tämän jälkeen analysoidaan, millaisia intersemioottisia ilmiöitä koko tekstissä on havaittavissa, ja erityisesti, miten tekstin tarkoitteiden merkitykset laajenevat, kun tarkoitteet esitetään eri semioottisilla resursseilla. Tutkimuksessa näytetään, että esimerkkitehtävien teksteissä tekstin merkitys rakentuu kaikkien käytettyjen semioottisten resurssien yhteispelinä. Lisäksi matematiikan hierarkkisen luonteen takia tekstissä oletetaan, että lukija tietää monenlaisia matematiikan käsitteitä ja sääntöjä.

Tämän jälkeen tutkimus keskittyy siihen, miten teksti rakentuu funktionaalisesti. Ensinnäkin ideationaalisen metafunktion osalta tutkimuksessa todetaan, että tekstissä rakennetaan usein täysin abstraktia matematiikan maailmaa. Lisäksi havaitaan, että jos matemaattinen ilmiö sidotaan reaalimaailman kontekstiin, ei konstruoidun reaalimaailman logiikka vastaa arkikokemuksen logiikkaa. Tutkimuksessa kuitenkin korostetaan, että koska tutkimus on laadullinen, ei edellä mainittua havaintoa voi yleistää tutkimusaineiston ulkopuolelle. Ideationaalisen metafunktion yhteydessä tutkimuksessa huomioidaan etenkin, miten maailmaa konstruoidaan symboliresurssissa. Toiseksi tutkimuksessa pohditaan interpersoonaista metafunktiota. Se näkyy tekstissä niin, että kirjoittajalle rakentuu autoritaarinen rooli ja lukijan roolina taas on lähinnä tarkkailla ja yrittää ymmärtää, mitä kirjoittaja tarkoittaa ja mitä tekstissä tapahtuu. Tekstin valinnat puolestaan luovat kuvaa ehdottomasta ja kiistattomasta totuudesta. Kolmanneksi tutkimuksessa keskitytään tekstuaalisesta metafunktiosta informaationkulkuun ja multisemioottisiin koheesiokeinoihin. Tutkimuksessa huomataan, että tekstin kulku on toisinaan hahmotettavissa hankalasti, sillä multisemioottisessa tekstissä informaationkulku ei ole yksiselitteinen.

Lopuksi tutkielmassa pohditaan lyhyesti matematiikan tekstin esitystapoja lukijan näkökulmasta.

Avainsanat – Nyckelord – Keywords
multisemiootiikka, systeemis-funktionaalinen kieliteoria, SF-MDA, oppimateriaali, matematiikka

Säilytyspaikka – Förvaringställe – Where deposited
Keskustakampuksen kirjasto

Muita tietoja – Övriga uppgifter – Additional information

SISÄLLYS

1 Tutkielman tarkoitus ja kulku....2
2 Aineisto ja teoriataustaa....4
2.1 Aineisto....4
2.2 Oppimateriaalit ja niiden tutkimus....6
2.3 Matematiikan oppimateriaalit ja niiden tutkimus....8
2.4 Matematiikan tekstit kielitieteen tutkimuskohteena....10
2.5 Matematiikan tekstien systeemis-funktionaalinen multisemioottinen analyysi....11
3 Semioottiset resurssit rakentamassa esimerkkitehtäviä....17
3.1 Semioottiset resurssit esimerkkitehtävien osissa ja yksiköissä....19
3.1.1 *Otsikko*....20
3.1.2 *Ongelman perustiedot*....21
3.1.3 *Direktiivi*....26
3.1.4 *Lasku*....27
3.1.5 *Visuaalistus*....30
3.1.6 *Tulkinta*....35
3.1.7 *Selitys* ja *ohje*....36
3.1.8 *Vastaus*....38
3.2 Tarkoitteiden merkitykset intersemioottisessa tekstissä....38
4 Esimerkkitehtävien funktionaalinen rakentuminen....44
4.1 Ideationaalinen metafunktio....45
4.2 Interpersoonainen metafunktio....48
4.2.1 Lukijan osallistujarooli ja kontakti lukijaan....49
4.2.2 Modaalisuus....54
4.3 Tekstuaalinen metafunktio....58
4.3.1 Informaationkulku....58
4.3.2 Koheesiokeinot....63
5 Lopuksi....64
Aineisto....68
Lähteet....68
Liite: Aineiston esimerkkitehtävät ja niiden yksiköt ja osat....76

1 Tutkielman tarkoitus ja kulku

Millainen maailma on ja miten se toimii? Jotta näihin kysymyksiin saadaan vastauksia, tarvitaan matematiikkaa. Matematiikkaa tarvitaan lähes kaikilla tieteenaloilla, esimerkiksi luonnontieteissä, taloustieteissä, yhteiskuntatieteissä sekä tekniikan ja teknologian aloilla. Matematiikka on siis tiede, joka läpäisee näkemystämme koko konkreettisesta maailmasta. Matematiikka on alun perin syntynyt tarpeesta ratkaista arkipäivän ongelmia, ja oikeastaan jokainen meistä käyttääkin matematiikkaa aivan jokapäiväisissä asioissa, kuten arjen taloudessa.

Viime aikoina uutisissa on oltu kovin huolissaan siitä, että suomalaisten matematiikan osaaminen heikentyy samaan aikaan, kun matematiikkaa tarvittaisiin yhä enemmän. Tulevaisuudessa siintävät tekoäly, automaatio ja robotit, ja niiden kehittäminen vaatii matematiikan osaamista. Matematiikan osaaminen onkin liitetty maamme talouden kilpailukykyyn ja koko Suomen tulevaisuuteen.

Kun koulussa opetetaan matematiikkaa, pyritään oppilaille antamaan riittävät matemaattiset eväät kunkin tulevaisuutta varten. Matematiikkaa opetetaan yleisimmin oppimateriaalien avulla. Millaisilla välineillä Suomen tulevaisuutta sitten turvataan? Millaisia matematiikan oppimateriaalien tekstit siis ovat ja miten niissä rakennetaan merkitystä ja maailmaa? Tämän tutkimuksen tarkoituksena on tuottaa tietoa siitä, millaisia tekstejä matematiikan oppimateriaalien esimerkkitehtävät ovat.

Tutkimuksen aihetta on motivoinut muutama eri tekijä. Matematiikan tekstejä on fennistiikassa tutkittu tähän mennessä hyvin vähän. On vain muutama harva tutkimus, joissa aineistona on matematiikan tekstejä. Yhdessäkään niistä ei tarkastella tekstistä luonnollisen kielen lisäksi sekä matematiikan symbolimerkintöjä että kuvia. Tekstien merkitys kuitenkin rakentuu kaikkien näiden yhteispelinä. Toiseksi fennistiikassa ei ole tähän mennessä tarkasteltu lainkaan nimenomaan esimerkkitehtäviä.

Kolmas motiivi on henkilökohtainen. Olen opiskellut matematiikkaa ja työskennellyt matematiikan oppimateriaalien kustannustoimittajana. On silti mainittava, etten tietenkään ole itse toimittanut mitään aineiston teoksista. Taustani joka tapauksessa näkynee siinä, millaisia alan ammattikieleen kuuluvia termejä käytän oppimateriaaleista. Pyrin selittämään tällaiset termit. On myös huomattava, että kokemukseni vuoksi olen aineistoa lukiessani hyvin eri asemassa kuin aineiston varsinaiset käyttäjät eli lukion juuri aloittaneet opiskelijat, sillä tekstien asiasisältö on minulle lähes itsestään selvää.

Kuten edellä kuvasin, on tämän tutkimuksen tarkoituksena kuvata matematiikan esimerkkitehtävien tekstilajia. Tutkimus sijoittuu kielitieteen kentällä sosiosemiotiikkaan, erityisesti systeemis-funktionaaliseen kielitieteeseen. Tutkimus on multisemioottisen tekstin tutkimusta eli tarkastelen eri semioottisten resurssien käyttöyhteyksiä ja ilmiöitä, joita syntyy, kun tekstissä käytetään useita eri semioottisia resursseja. Edelleen pohdin esimerkkitehtävien rakennetta sekä sitä, millaiseksi teksti rakentuu tekstissä tehdyillä valinnoilla.

Tutkimus on laadullinen katsaus matematiikan esimerkkitehtäviin. Koska aineistoa on rajallinen määrä, ei siitä tehtäviä havaintoja voi suoraan yleistää kovin laajasti. Laadullisen tutkimuksen tulisi määritelmällisesti olla hypoteesitonta, ja hypoteesiksi onkin erotettavissa lähinnä se, että käsittelen matematiikan esimerkkitehtäviä oletettuna tekstilajina (ks. esim. Heikkinen – Lounela 2008: 26). Toisin sanoen oletan tekstien kuuluvan samaan luokkaan tekstinulkoisten seikkojen nojalla, käytännössä siis esiintymiskontekstin ja asiasisällön perusteella.

Tutkimus pyrkii hahmottamaan esimerkkitehtävien tekstilajia kuvaamalla niitä sekä tekstin rakenteen että tekstin funktioiden kannoilta. Tutkimuksessa etsitään vastauksia seuraaviin kysymyksiin: 1. Miten luonnollinen kieli, matematiikan symbolimerkinnät ja kuvat rakentavat tekstiä ja sen osia? 2. Miten teksti rakentuu funktionaalisesti, eli miten ja millaista maailmaa tekstissä rakennetaan, millaiset roolit muodostuvat kirjoittajalle ja lukijalle sekä miten itse teksti kulkee ja pysyy kasassa?

Kuvaan seuraavaksi tutkimuksen rakennetta. Esittelen ensin tutkimuksen aineiston ja kerron, mitkä tekijät ovat vaikuttaneet aineiston rajaukseen. Sen jälkeen luon katsauksen oppimateriaaleihin, niiden tutkimukseen ja erityisesti matematiikan oppimateriaaleihin sekä kielitieteelliseen tutkimukseen, jota tähän mennessä on tehty matematiikan teksteistä. Lisäksi kerron pääpiirteitä teoriasta, johon tutkimus pohjautuu.

Tämän jälkeen alkaa itse aineiston analyysi. Luvussa 3 näytän, millainen rakenne matematiikan esimerkkitehtävillä on ja miten rakenteellisissa osissa käytetään luonnollista kieltä, matematiikan merkintöjä ja kuvia. Luvun loppuosassa tarkastelen sitä, miten tekstissä olevien tarkoitteiden merkitykset kulkevat ja laajenevat, kun tarkoitteisiin viitataan eri semioottisilla resursseilla.

Luvussa 4 puolestaan keskityn siihen, miten teksti rakentuu funktionaalisesti. Pohdin ensinnäkin tekstin maailmankuvaa, toiseksi tekstissä konstruoitavia sosiaalisia suhteita ja suhtautumista sekä kolmanneksi itse tekstin tekstuaalisia piirteitä.

Viimeisessä luvussa teen yhteenvetoa siitä, millaisia vastauksia analyysi antaa edellä asetettuihin kysymyksiin eli millaiseksi tekstilajiksi matematiikan esimerkkitehtävät hahmottuvat. Lisäksi mietin lyhyesti aiheita jatkotutkimuksille.

2 Aineisto ja teoriataustaa

Tässä luvussa esittelen ensin, millaiset tekstinulkoiset seikat ovat vaikuttaneet aineiston rajaukseen. Sitten kerron hieman itse aineistosta. Toisessa alaluvussa keskityn oppimateriaaleihin ylipäänsä. Tämän jälkeen suuntaan huomion nimenomaan matematiikan oppimateriaaleihin. Lopuksi luon katsauksen siihen, millaista kielitieteellistä tutkimusta aiemmin on tehty teksteistä, joiden asiasisältö on matematiikkaa.

2.1 Aineisto

Aineiston valinta on lähtenyt tekstinulkoisista seikoista ja sitä on motivoinut lukion uusin opetussuunnitelma. Kuvaan seuraavaksi, miten opetussuunnitelma muuttui ja miten opetussuunnitelman sisältö vaikutti aineiston asiasisällölliseen rajaukseen.

Uusin lukion opetussuunnitelma julkaistiin 27.10.2015, ja se tuli noudatettavaksi seuraavasta syksystä lähtien (LOPS 2015: 3). Oppimateriaalien laatimiseen oli siis hyvin vähän aikaa, sillä Ruuskan (2015: 19) mukaan oppimateriaalin laatiminen vie vuodesta kahteen. Matematiikan oppiaineeseen tuli uutuutena kurssi, joka on matematiikan yhteinen ensimmäinen kurssi sekä lyhyen että pitkän oppimäärän opiskelijoille (LOPS 2003: 118–119, 125; LOPS 2015: 130). Opetussuunnitelmassa kurssin kuvauksessa kerrotaan aivan aluksi, että ”Matematiikan yhteisen opintokokonaisuuden tehtävänä on herättää opiskelijan kiinnostus matematiikkaa kohtaan – –” (LOPS 2015: 130). Ennen opetussuunnitelmien laatimista asia muotoiltiin hieman toisin. Lukiokoulutuksen uudistusta pohtinut työryhmä näki kurssin tehtäväksi ensinnäkin kiinnostuksen herättämisen nimenomaan pitkää matematiikkaa kohtaan ja toiseksi sen, että etenkin tytöt valitsisivat pitkän oppimäärän (OPM 2013: 36). Kurssille asetetut tavoitteet on nähty yhteiskunnan kannalta todella suuressa roolissa. Esimerkiksi kun senhetkistä opetusministeriä Grahn-Laasosta haastateltiin lukiokoulutuksesta, hän kuvasi, että matemaattinen osaaminen vaikuttaa koko Suomen tulevaisuuteen (Hallamaa 2016).

Uuden ensimmäisen kurssin nimi on Luvut ja lukujonot. Uuden kurssin asiasisältö eroaa aiemmista matematiikan lyhyen ja pitkän oppimäärän ensimmäisistä kursseista, ja nimensä mukaisesti kurssilla käsitellään muun muassa lukujonoja ja niiden summia. (LOPS 2015: 130.) Aiemmassa opetussuunnitelmassa kyseiset asiat tulivat molemmissa matematiikan oppimäärissä myöhemmillä kursseilla: pitkässä matematiikassa kurssilla 9 ja lyhyessä kursseilla 6 ja 7 (LOPS 2003: 119, 122–123, 125, 127). Nykyisessä opetussuunnitelmassa lukujonoja ei pitkän matematiikan pakollisilla kursseilla käsitellä ensimmäisen kurssin jälkeen lainkaan, eli periaatteessa opiskelijoiden tulisi osata ylioppilaskokeessa lukujonoihin liittyvät asiat tämän kurssin perusteella. Lyhyessä matematiikassa puolestaan lukujonot mainitaan keskeisenä sisältönä kurssilla 4 sekä osana keskeistä sisältöä kurssilla 6. (LOPS 2015: 131–138.) Ensimmäisen kurssin keskeisten sisältöjen luetelmassa on opetussuunnitelmassa kahdeksan kohtaa, joista neljä liittyy lukujonoihin ja niiden summiin (LOPS 2015: 130). Koko matematiikan oppiaineen opetussuunnitelmasta on siis pääteltävissä, että ensimmäisen kurssin sisällössä lukujonot ovat aivan keskeisenä asiana.

Koska matematiikan ensimmäinen yhteinen kurssi on oppiaineessa uusi, on sen toteutumista tarkasteltu matematiikan opettamisen ja oppimisen näkökulmista. Kyselyiden mukaan sekä opiskelijat että opettajat ovat kokeneet, että kurssi on vaikea ja että siinä on liikaa asiaa (Leinonen – Turkki – Harmoinen 2017: 39–41; Antola 2017; Portaankorva-Koivisto – Eronen – Kupiainen – Hannula 2018: 63). Osa opettajista on karsinut opetettavaa asiaa ja jättänyt muun muassa lukujonot kokonaan käsittelemättä, mitä kyselyä tehneet Eronen ja kumppanit (2017: 34) pitivät yllättävänä. Olen Erosen ja kumppaneiden kanssa samoilla linjoilla, sillä opetussuunnitelman (LOPS 2015: 130) perusteella lukujonot ovat kurssilla olennainen elementti. Ensimmäisten kokemusten jälkeen näyttäisi siltä, etteivät opiskelijat ole innostuneet valitsemaan aiempaa useammin matematiikan pitkää oppimäärää kurssin jälkeen, vaikka tämä kurssin tavoitteeksi asetettiinkin (Portaankorva-Koivisto ym. 2018: 61, 64; OPM 2013: 36). Portaankorva-Koiviston ynnä muiden (mp.) kyselytutkimuksessa tarkastellaan, kumman oppimäärän opiskelija oli aikonut valita ennen kurssia ja muuttuiko päätös kurssin jälkeen. Tutkimuksen tuloksena on, että suurempi osa opiskelijoista vaihtoi aiotun pitkän matematiikan lyhyeen kuin toisin päin (mp.).

Kurssin tavoitteet ovat siis suuria, mutta ensikokemusten jälkeen vaikuttaa siltä, että niitä ei ainakaan toistaiseksi ole saavutettu. Opetussuunnitelman perusteella kurssin keskeisenä asiana näyttäytyvät lukujonot. Siksi tutkimuksen aineistona ovat kolmen eri oppimateriaalin esimerkkitehtävät ensimmäisestä lukujonoja käsittelevästä alaluvusta. Seuraavaksi kuvailen tutkimuksessa käytettävää aineistoa hieman tarkemmin.

Tutkimuksen aineisto on koostettu kolmesta oppimateriaalista, jotka on suunnattu lukion matematiikan ensimmäiseen yhteiseen kurssiin. Oppimateriaalit ovat *Lukion yhteinen matematiikka: MAY1* (Edita), *Otavan matematiikka: MAY1* (Otava) ja *Yhteinen tekijä: lukion matematiikka. 1, Luvut ja lukujonot* (Sanoma Pro). Käytän teoksista lyhenteitä LYM, OM ja YT. Kaikki kolme teosta ovat ilmestyneet vuonna 2016. Oppimateriaalin tekijöitä *Lukion yhteisessä matematiikassa* on neljä, *Yhteisessä tekijässä* seitsemän ja *Otavan matematiikassa* peräti kaksitoista. Oppikirjailijoiden suurta määrää selittää se, että materiaalin laatineessa työryhmässä ovat olleet joko kaikki pitkän ja lyhyen matematiikan oppimateriaalisarjojen tekijät tai moni heistä.

Teoksista huomion kohteeksi on rajattu ensimmäinen sellainen alaluku, jossa esitellään lukujonojen käsite. Yhdessäkään teoksessa lukujonot eivät ole aivan materiaalin alussa. Kahdessa teoksessa ne käsitellään viimeisessä pääluvussa (LYM ja YT), ja yhdessä lukujonot ja niihin liittyvät asiat aloitetaan teoksen toisessa pääluvussa (OM). Aineiston oppimateriaaleissa ei siis käsitellä samassa järjestyksessä kurssin opetussuunnitelmaan kirjattuja asioita, eli materiaalien tekijöiden didaktiset valinnat eroavat toisistaan. Teokset eroavat myös siinä, miten lukujonojen perusteisiin liittyvät asiat jaotellaan. Kahdessa teoksessa ensimmäisessä alaluvussa sekä esitellään lukujonojen käsite että määritellään lukujonon yleinen jäsen (LYM ja YT). Yhdessä teoksessa ensimmäinen alaluku puolestaan sisältää vain lukujonojen käsitteen (OM). Esimerkkitehtävien määrään erot eivät heijastu, sillä aineistossa on neljästä viiteen esimerkkitehtävää kustakin teoksesta.

Aineiston muodostavat edellä kuvattujen alalukujen esimerkkitehtävät. Oppimateriaaleissa voi harjoitustehtävien lisäksi olla teoria- eli opetustekstin lomassa monenlaisia tehtäviä, mutta tarkastelun kohteena ovat vain tehtävät, joihin esitetään ratkaisu heti tehtävänannon jälkeen. Aineistossa on yhteensä kolmetoista esimerkkitehtävää.

2.2 Oppimateriaalit ja niiden tutkimus

Kuvailen ensin, mitä oppimateriaali ylipäänsä on. Tässä yhteydessä esittelen lyhyesti myös, mitä oppimateriaaleista yleensä tutkitaan.

Käytän tässä tutkimuksessa tutkittavasta aineistosta nimitystä *oppimateriaali* ja termin määrittelyssä yhdyn Heinosen (2005: 30) ja Ruuskan (2014: 80) määritelmiin: oppimateriaali sisältää ”perinteisen” painetun kirjan lisäksi myös kaiken muun opetustarkoitukseen tehdyn oppiainesta sisältävän aineiston, kuten erilaiset digitaaliset rikasteet. Aineiston teoksissa voi olla viittauksia erilaisiin digitaalisiin rikasteisiin, kuten videoihin ja appletteihin[1]. Kuten aiemmin kuvasin, on aineisto rajattu sisällön perusteella, joten on sattumaa, että esimerkkitehtävissä ei ole viittauksia rikasteisiin. Vaikka aineisto siis faktisesti koostuu pelkistä painetuista kirjoista, käytän termiä oppimateriaali, sillä kuten Ruuska (mp.) osuvasti toteaa, oppikirja ”terminä on jäänyt viime vuosituhannelle”.

Mikkilä-Erdman, Olkinuora ja Mattila (1999: 436–437) kuvaavat oppimateriaaleja neutraaleiksi eli kirjoittajan ääni ei kuulu ja faktojen toteaminen on neutraalia. Uusikylän ja Atjosen (2005: 169) mukaan käytetyn kielen ja käsitteiden tulisi kuitenkin vastata opiskelijan omaksumiskykyä. Häkkinen (2002: 84) huomioi, että kaikkien oppiaineiden oppimateriaalit ovat kielenkäytön esikuvia. Mikkilä-Erdman ja kumppanit (1999: 436–437) jatkavat, että hyvän oppimateriaalin tulisi myös kertoa käyttäjälleen, minkä oppiminen on tärkeää. Lisäksi he toteavat, että oppimateriaalit opettavat oppimaan ja ohjaavat koko opetustapahtumaa (mp.). Häkkinen (2002: 83) kuvaa ylipäänsä motivaation merkitystä oppimisprosessille, ja Uusikylä ja Atjonen (2005: 168) puolestaan esittävät, että oppimateriaalin tulee aktivoida ja motivoida. Ekonoja puolestaan (2014: 62) referoi Heinosta (2005: 46), ja molemmat yhtyvät Rothin, Andersonin ja Smithin (1987: 546) luonnehdintaan, että hyvä oppimateriaali haastaa opiskelijan ajattelua. Samaa ajatusta noudattaa Häkkinen (2002: 84), kun hän toteaa, ettei hyvä oppimateriaali tee opiskelijasta passiivista tiedon vastaanottajaa. Vaikka edellä luetellut oppimateriaalin ominaisuudet ovat osin arvottavia, voidaan kuitenkin arvella, että oppimateriaalien laatijat pyrkivät tekemään kuvatun kaltaisia materiaaleja.

Hiidenmaa (2015: 27) kuvaa oppimateriaalien tutkimusta, ja kertoo, ettei oppimateriaaleja ole tutkittu järjestelmällisesti, vaan suurin osa tutkimuksista on erilaisia opinnäytteitä. Karvonen, Tainio ja Routarinne (2017: 42–43) puolestaan tekevät systemaattisen katsauksen peruskoulun oppimateriaalien tutkimukseen ja rajaavat katsauksestaan opinnäytteet pois. He näkevät, että tähänastiset oppimateriaalien sisältöihin keskittyvät tutkimukset jakautuvat kahtia eli tutkimuksiin, joissa tarkastellaan oppimateriaalien ideologiaa, ja tutkimuksiin, joissa tarkastellaan oppimateriaalien pedagogiaa (mas. 47–48). Oppimateriaalien asiasisältöön, ideologiaan tai pedagogiaan liittyvät tutkimukset eivät ole tämän tutkimuk-

1 Appletti tarkoittaa tässä yhteydessä matematiikan teorian tai tehtävän interaktiivista havainnollistusta. Yleisimmin niissä käytetään GeoGebra-ohjelmaa, joka on käytössä myös sähköisessä ylioppilaskokeessa.

sen kannalta relevantteja. Toki on tehty tutkimuksia, joissa tarkastellaan oppimateriaalien tekstejä kielen näkökulmasta. Tällainen tutkimus on esimerkiksi Karvosen (1995) väitöskirja. Ei kuitenkaan ole järkevää alkaa verrata kielitieteellistenkään tutkimusten tuloksia tässä tutkimuksessa tehtäviin havaintoihin, sillä ensinnäkin oppiaineet eivät ole samoja ja toiseksi tässä tutkimuksessa tarkastelutapa on multisemioottinen. Esimerkiksi edellä mainittu Karvosen (mt.) tutkimus ei huomioi kuvia lainkaan.

2.3 Matematiikan oppimateriaalit ja niiden tutkimus

Suunnataan katse nimenomaan matematiikan oppimateriaaleihin. Sekä Tossavainen, Joutsenlahti, Lehtinen ja Merikoski (2017: 222–223) että Perkkilä, Joutsenlahti ja Sarenius (2018: 361–362) lainaavat Janssonin vuonna 1927 [s. 89] listaamia ominaisuuksia, millainen on hyvän laskuopin oppikirja. He kaikki ovat sitä mieltä, että kriteerit pätevät myös nykyaikaisille matematiikan oppimateriaaleille (Tossavainen ym. 2017: 223; Perkkilä ym. 2018: 361–362). Summaan vaatimukset, jotka Jansson esittää *Kansakoulun laskuopin opetusopissa*, ja päivitän ne nykyajan termeille seuraavasti. Oppimateriaalissa kurssiin kuuluvien asioiden tulee olla suunnitelmallisessa järjestyksessä. Teorian lisäksi oppimateriaalissa tulee olla esimerkkitehtäviä. Tehtävien pitää harjoittaa laskemista eri välineillä. Tehtävissä kontekstien tulee olla arkielämän konteksteja ja mieluusti mukana tulisi olla tehtäviä, joissa matematiikka yhdistetään muihin oppiaineisiin. Tehtävien tulee siis motivoida ja toki niiden tulee olla sopivan tasoisia. (Tossavainen ym. 2017: 223; viitattu Jansson 1927: 89; Perkkilä ym. 2018: 361; viitattu Jansson 1927: 89.) Näiden kriteerien lisäksi Tossavainen ynnä muut (2017: 223) korostavat matematiikan käsitteiden ymmärtämistä. Perkkilä kumppaneineen (2018: 361) puolestaan tähdentää, että esimerkkitehtävien ei ole tarkoitus olla mekaanisesti kopioitavia malleja vaan ”ponnahduslauta” opiskelijan omalle matemaattiselle ajattelulle. Oppimateriaalien tehtävistä Ahtee ja Pehkonen (2000: 61) huomioivat, että ne ovat suljettuja eli niiden alku- ja lopputilanne on määritelty yksikäsitteisesti. Luonnollisesti esimerkkitehtävät eli aineiston tehtävät ovat tällaisia suljettuja tehtäviä, sillä avoimet tehtävät (ks. mp.) voisivat rönsytä mihin suuntaan tahansa.

Oppimateriaalilla on matematiikan opetuksessa ollut Suomessa perinteisesti vahva jalansija, eli suurin osa opetuksesta perustuu oppimateriaaliin ja myös etenee suoraan oppimateriaalin mukaan (Heinonen 2005: 158, 161, 190; Joutsenlahti – Vainionpää 2010: 137, 146; Tossavainen 2015: 129–130; Perkkilä ym. 2018: 349). Perkkilä kumppaneineen

(2018: 349–351) näkee, että matematiikan oppimateriaalilla on oppimisprosessissa kolmenlaisia tehtäviä eli materiaali ohjaa, tukee ja abstrahoi toimintaa. Opettajat siis opettavat erityisesti matematiikan oppiainetta hyvin oppimateriaalikeskeisesti, ja tutkimuksissa on havaittu, että ainakin perusopetuksessa oppimistuloksilla ja oppimismahdollisuuksilla voi olla yhteys käytettyyn oppimateriaaliin (Heinonen 2005: 190; Törnroos 2004: 128–199; Niemi 2008: 85). Reaaliaineisiin verrattuna matematiikassa oppimateriaalilla onkin erityinen merkitys. Kun kyse on ensimmäisestä kurssista lukiossa, arvelee Riiho (2018: 13–14), että oppimateriaalilla voi olla merkitystä myös siihen, valitseeko opiskelija kurssin jälkeen pitkän vai lyhyen matematiikan oppimäärän.

Koska oppimateriaali on niin suuressa roolissa matematiikan opetuksessa, voidaan kenties ajatella, että opetussuunnitelmassa oppiaineelle annettujen tehtävien ja tavoitteiden tulisi olla saavutettavissa oppimateriaalin avulla tai vähintäänkin oppimateriaalin tulisi jollakin tavalla tukea niiden saavuttamista. Matematiikan koko oppiaineelle annetut kielen kannalta merkittävät tehtävät ja tavoitteet ovat seuraavat: opetuksen tehtävänä on opettaa opiskelija käyttämään puhuttua ja kirjoitettua matematiikan kieltä ja opiskelijan taitoa siirtyä toisesta matemaattisen tiedon esitysmuodosta toiseen tuetaan (LOPS 2015: 129).

Matematiikan oppimateriaaleja tutkitaan eniten didaktisesta näkökulmasta. Tosin Karvonen, Tainio ja Routarinne (2017: 46) ovat havainneet, että muihin oppiaineisiin verrattuna matematiikan oppimateriaaleja tutkitaan merkittävän paljon vähemmän. Saman ovat panneet merkille Joutsenlahti, Perkkilä ja Tossavainen (2017: 99). Tässä yhteydessä huomion arvoisia ovat lähinnä julkaisut, joissa tarkastellaan samaa tai osittain samaa aineistoa kuin tässä tutkimuksessa. Esimerkiksi pro gradu -tutkielmia matematiikan yhteisestä opintokokonaisuudesta eli ensimmäisestä yhteisestä kurssista on tehty muun muassa seuraavista aiheista: miten eri kustantajien kirjasarjoissa tuetaan ensimmäisen kurssin jälkeistä siirtymää pitkään tai lyhyeen matematiikkaan (Riiho 2018), miten lukujonojen, summien ja sarjojen opetus muuttuu opetussuunnitelman muuttuessa (Lindgrén 2018), miten painettu tai sähköinen oppimateriaali vaikuttaa ensimmäisen kurssin oppimiskokemukseen (Peltonen 2017) sekä miten lukion opiskelijat ja opettajat ovat kokeneet ensimmäisen yhteisen kurssin (Karkkulainen 2017). Lisäksi kahdesta aineistoon kuuluvasta teoksesta on julkaistu kirja-arvio (Lehtinen 2017).

Didaktisen lähestymisen tutkimukseen saatetaan yhdistää myös kielitieteellistä hahmotusta. Esimerkiksi Lehtosen (2018) tutkimuksessa ja tässä tutkimuksessa teoreettiset viitekehykset lähestyvät toisiaan. Lehtonen tutkii siis alakoulun matematiikan oppimateriaaleja multisemioottisuuden kannalta ja selvittää, miten niissä yhdistetään luonnollista kieltä, matematiikan symboleja ja kuvia ja mitä oppilaan odotetaan itse käyttävän ja tuottavan, kun hän vastaa tehtävään. Kyseisen tutkimuksen lähtökohdat kuitenkin eroavat tästä tutkimuksesta, sillä ensinnäkin Lehtosen näkökulma tosiaan on didaktinen. Toiseksi alakoulun oppimateriaalien rakenne eroaa lukion oppimateriaalien rakenteesta suuresti, eli aineistot ovat hyvin erilaisia. Kolmanneksi Lehtonen ei tarkastele lainkaan semioottisten resurssien vuorovaikutusta eli intersemioottisia ilmiöitä, joita tässä tutkimuksessa puolestaan havainnoidaan.

Törnroosin (2004: 34) mielestä matematiikan oppimateriaaleja ei ole luontevaa tarkastella niiden tekstisisällön kannalta, sillä hän väittää selittävän tekstin osuuden olevan varsin pieni. Törnroos (mts. 35) summaa aiempia tutkimuksia ja selostaa matematiikan oppimateriaalien tekstien muistuttavan toisistaan irrallisiksi jääviä tietolistoja. Myös Meaney (2004: 23[2]) kertoo Gerot'n [1992] esittävän, että matematiikan oppimateriaaleissa ei selitetä käsitteitä ja yhdistetä asioita, vaan oletetaan, että opiskelijat vain hoksaavat asiat samalla kun tekevät harjoitustehtäviä. Törnroos (2004: 34) toteaa, että matematiikan oppimateriaaleja on perinteisesti siis tarkasteltu enimmäkseen harjoitustehtävien osalta. On totta, että matematiikan opetuksessa harjoitustehtävien laadulla on suuri merkitys. Totta on myös se, että oppimateriaalin erottaa muusta tietokirjasta juuri se, että siinä on tehtäviä (Ruuska 2014: 80–81; 2015: 22–23). Törnroosin näkemys siitä, että muita kuin harjoitustehtäviä ei kannattaisi tarkastella, on mielestäni erikoinen. Eihän koko oppimateriaalin muu sisältö ole merkityksetöntä. Ja kuten analyysin edetessä huomataan, ainakin lukion oppimateriaalien esimerkkitehtävät sisältävät tekstiä, myös selittävää sellaista.

2.4 Matematiikan tekstit kielitieteen tutkimuskohteena

Hyvin harva fennisti on valinnut matemaattista tekstiä tutkimuksensa aineistoksi. Tähän mennessä matematiikan tekstejä ei ole tutkittu kuin kolmessa pro gradu -tutkielmassa. Laurin (2014) pro gradu -tutkielma kuvaa lyhyen matematiikan ylioppilaskokeiden sanallisten tehtävien tekstilajia, ja aineistona ovat kokeet kymmenen vuoden ajalta. Koetehtäviä Lauri käsittelee vain leipätekstin osalta eli hän on rajannut kuvat, taulukot ynnä muut tarkastelun ulkopuolelle. Laurin tutkimus kuvaa koetehtävien tekstilajia ja erottaa tekstistä funktionaalisia osia. Turpeinen (2017) puolestaan kuvaa pro gradussaan sanallisten matematiikan teh-

2 E-kirjassa ei ole sivuja, joten sivunumero viittaa pdf-tiedostoon, joka syntyy, kun kirjasta lataa luvun 4.

tävien kysymyksenasettelua ja sitä, miten tehtävänantojen kielellisillä valinnoilla mahdollisesti vaikutetaan matemaattiseen ongelmanratkaisuun. Sekä Lauri että Turpeinen tarkastelevat siis tehtäviä ja nimenomaan sanallisia tehtäviä. Molemmat ovat jättäneet tarkastelun ulkopuolelle kaikki luonnollisen kielen ulkopuoliset elementit, mikä ei ole matemaattisten tekstien tutkimuksessa poikkeuksellista, sillä näin teki jo Halliday (1978: 195). Myös didaktisissa tutkimuksissa, joissa hyödynnetään kielitieteen teorioita, rajataan tutkimuksesta usein huomion ulkopuolelle muut kuin luonnollisen kielen elementit (esim. Gerofsky 1999; Morgan 2006).

Edellä mainittujen pro gradu -tutkielmien lisäksi matematiikan oppikirjoja on tutkinut Reku (2004). Hän analysoi pro gradussaan lukion pitkän matematiikan ensimmäisen kurssin kirjoista opetustekstejä. Rekun tutkimus onkin tähänastisesta suomenkielisestä kielitieteellisestä tutkimuksesta lähimpänä tätä tutkimusta siinä mielessä, että tutkimuksen kohteena ei ole pelkkä luonnollisen kielen osuus sekä siinä mielessä, että aineistona on matematiikan oppimateriaaleja lukion alkupuolelta. Tämän tutkimuksen aineistona kuitenkin on pelkkiä esimerkkitehtäviä, kun taas Reku tarkastelee vain teoria- eli opetustekstiä. Lisäksi käytetyt teoreettiset viitekehykset eroavat toisistaan, mistä seuraa esimerkiksi se, että tässä tutkimuksessa kuvat ovat suuremman huomion kohteena kuin Rekun tutkimuksessa.

Suomenkielisen tutkimuksen sijaan lähimpänä tätä tutkimusta ovat O’Halloranin (2005: 189–199; 2007b; 2008a) tutkimukset, joissa hän tarkastelee englanninkielisten matematiikan oppimateriaalien esimerkkitehtäviä kielitieteen kannalta. Nostan kaikista O’Halloranin tutkimuksista vertailuun erityisesti sellaiset tutkimukset, joiden aineisto on lähimpänä tämän tutkimuksen aineistoa. Kolmen yksittäisen tutkimuksen aineistoista (O’Halloran 2005: 190; 2007b: 78; 2008a: 232) näen, että esimerkkitehtävissä käsitellään asioita, jotka kuuluvat lukiomatematiikkaan. Tosin kyseiset esimerkkitehtävät eroavat tämän tutkimuksen aineistosta hieman, sillä tämän tutkimuksen aineisto on lukion alkuvaiheesta ja siten matemaattisesti helpompaa. Tämä tutkimus myös poikkeaa edellä mainituista tutkimuksista etenkin siten, että hahmotan tekstin osat eri tavalla kuin O’Halloran. Palaan erityisesti osien hahmottamisen eroihin luvun 3 alussa.

2.5 Matematiikan tekstien systeemis-funktionaalinen multisemioottinen analyysi

Kerron ensin, mitä muuta kuin luonnollista kieltä matematiikan teksteissä on ja miten näitä tekstin muita elementtejä on tähän mennessä kuvattu. Sitten kerron tämän tutkimuksen kannalta tärkeimmät asiat siitä, miten matematiikan tekstejä voidaan tutkia systeemis-funktionaalisen teorian avulla.

Matematiikan teksteissä käytetään kolmea eri semioottista resurssia: luonnollista kieltä, symbolimerkintöjä ja (matemaattisia) kuvia (O'Halloran 2005: 6, 10–17, 158–163). Koska kyse on nimenomaan semioottisista resursseista, en käytä teksteistä termiä *multimodaalinen* vaan *multisemioottinen*. Matematiikan symbolit ovat kehittyneet osin luonnollisesta kielestä, mutta kyseessä on siis kaksi eri merkkijärjestelmää (mts. 22–59, 94; O'Halloran 2007b: 82; Lemke 1998: 3[3]). Matematiikan symbolimerkit ja kuvat eivät eroa semantiikan näkökulmasta luonnollisesta kielestä eli kaikissa niissä on jokin merkki – eli luonnollisen kielen sana, matemaattinen symboli tai kuva – sekä merkin viittaamisen kohde (Lemke 2003: 3–8[4]).

Matematiikan didaktisissa tutkimuksissa matematiikan symboliresurssista puhutaan useimmiten kielenä (esim. Tossavainen 2005; 2007; Joutsenlahti 2009; Joutsenlahti – Rättyä 2015). Matematiikan merkintöjen opettamista saatetaan myös verrata vieraan kielen opettamiseen (Silfverberg – Portaankorva-Koivisto – Yrjänäinen 2005). Tutkimuksissa voi silti vilahtaa termi *semioottinen järjestelmä* tai termi *multisemioottinen* (ks. esim. Joutsenlahti – Tossavainen 2018: 414; Joutsenlahti – Rättyä 2015: 51–52). Kun tutkimuksia havainnoi kielitieteen näkökulmasta, huomaa, että tutkimuksissa kaikkia semioottisia resursseja nimitetään kieliksi ja että toisinaan niissä sekoitetaan toisiinsa tekstin rekisteri (ks. esim. Halliday 1978: 31–32, 35, 110–111) ja tekstissä käytetyt merkkijärjestelmät. Vaikka didaktisissa tutkimuksissa saatetaan käyttää kielitiedettä apuna, ei esimerkiksi Lehtosenkaan (2018) kielitiedettä hyödyntävässä tutkimuksessa problematisoida termien sekalaista käyttöä, vaan myös siinä *kieli* samastetaan *semioottiseen resurssiin*.

Kielitieteen puolella Reku (2004: 11, 67) vertaa matematiikkaa vieraaseen kieleen ja viittaa Usiskinin [1996: 232] perusteluihin, että matematiikalla on oma sanastonsa, merkistönsä ja kielioppinsa. Hieman ristiriitaisesti tosin matematiikka ei puhuttuna enää olekaan oma kielensä, sillä puhuttuna se muuttuu luonnolliseksi kieleksi (Reku 2004: 67). Kun matemaattisista aiheista puhutaan, sisältää puhe Meaneyn (2004: 14[5]) havaintojen mukaan symbolien nimiä, eli puheessa viitataan symbolimerkintöihin.

Erikoisista määritelmistä aiheutuvat ristiriidat hälvenevät, kun symboliresurssia ei ajattele kielenä vaan nimenomaan yhtenä semioottisena resurssina, jonka välittämää merki-

3 Sivunumero viittaa pdf-tiedostoon, jossa ei noudateta alkuperäisen julkaisun sivunumerointia.
4 Ks. ed. viite.
5 E-kirjassa ei ole sivuja, joten sivunumero viittaa pdf-tiedostoon, joka syntyy, kun kirjasta lataa luvun 4.

tystä voidaan yrittää kuvata toisella semioottisella resurssilla eli luonnollisella kielellä – tai kuvaresurssilla. Toki silloin, kun fokus on kielitieteen sijaan matematiikan opettamisessa, voi lukijalle olla hyödyksikin, että semioottista resurssia nimitetään kieleksi. Tällöin kielen teoriaan perehtymätön lukija saa jonkinlaisen vertauskuvan tai yhtymäkohdan, että symbolimerkinnöissä on kyse jostakin ilmiöstä, joka tavalla tai toisella eroaa siitä kielestä, jolla lukija puhuu.

O'Halloran (2005: 22–59) kuvaa matemaattisten tekstien historiallista kehitystä ja luonnehtii, millaista matematiikan teksti on. Hän toteaa, että matematiikka koetaan nykyään (länsimaisessa) kulttuurissamme ehdottomana totena (mts. 18, 74, 208–209). Nykyisin matematiikan ilmiöt voivat esiintyä ilman mitään reaalimaailman kontekstia, vaikka aiemmin historiassa matematiikka liitettiin usein johonkin luonnontieteelliseen kontekstiin (mts. 36–38). Itse symbolimerkinnät kehittyivät tarpeesta esittää asiat mahdollisimman yksiselitteisesti ja tiiviisti (mts. 57, 97). Symboliresurssi antaa mahdollisuuden järjestää ja muokata matemaattisia olioita ja ilmiöitä sekä niiden suhteita siten, että symboliresurssilla voidaan helposti esimerkiksi ratkaista ongelmia tai rakentaa matemaattisia malleja (mts. 97). Symboliresurssin merkintöjä on usein luonnollisen tekstin seassa, mutta keskeiset elementit erotetaan nykyään usein muusta tekstistä spatiaalisesti (mts. 122).

Historian saatossa matematiikan piirroksista puolestaan poistuivat sekä ihmishavaitsija ja sen näkökulma että muut tilannekontekstiin liittyvät elementit (O'Halloran 2005: 34–46). Matematiikan kuvat ovat O'Halloranin (mts. 134) mukaan nykyään itsessään multisemioottisia eli ne sisältävät graafisten elementtien lisäksi elementtejä luonnollisesta kielestä ja symboliresurssista. Kuvat erotetaan nykyisin muusta tekstistä spatiaalisesti (mts. 31).

Matematiikan tekstit ovat siis multisemioottisia, mutta niitä voi tutkia systeemis-funktionaalisen teorian avulla, sillä O'Halloran (mm. 2005) on laajentanut Hallidayn (mm. 1978; myös esim. Martin 1992) esittelemää systeemis-funktionaalista teoriaa symboli- ja kuvaresursseihin. Myös muut tutkijat ovat laajentaneet ja soveltaneet systeemis-funktionaalista teoriaa muihin semioottisiin resursseihin. O'Halloran on näistä hyödyntänyt muiden muassa O'Toolen (1994), Kressin ja van Leeuwenin (2006), Roycen (1998), Lemken (1998) ja Limin (2004) tutkimuksia. O'Halloran on käyttänyt hyväkseen myös muita multisemioottisten tekstien tutkimuksia, kuten Baldryn ja Thibaultin (2006) sekä Batemanin (2008) tutkimuksia.

O'Halloranin hahmotteleman teorian nimi on *systemic functional multimodal discourse analysis*, ja siitä käytetään lyhennettä SF-MDA. Teoriassa siis huomioidaan eri semioottiset resurssit, metafunktiot, kielen kerrostuminen, systeemiset valinnat ja semioottisten resurssien intersemioottiset suhteet (mm. O'Halloran 2005).

Matematiikan näkökulmasta kattavin O'Halloranin lukuisista SF-MDA:ta koskevista julkaistuista on vuoden 2005 kirja *Mathematical discourse: language, symbolism and visual images*. O'Halloran on kirjan jälkeen julkaissut lukuisia artikkeleita (mm. 2007a; 2007b; 2008a; 2015a; 2015b), joissa hän tiivistää kirjassa esittämiään ajatuksia matemaattisista teksteistä, kehittää niitä edelleen ja pohtii matemaattisten tekstien eri aspekteja.

Vaikka O'Halloran on kehittänyt teoriaansa pääosin matematiikan tekstien pohjalta, eivät matematiikan tekstit suinkaan ole SF-MDA:n ainoa käyttökohde. Teoriaa on sovellettu myös esimerkiksi painettuun mainokseen (O'Halloran 2008b), infografiikkaan (Cheung 2015), sähköisiin tietosanakirjoihin (Liu 2017), ISISin materiaaleihin (Wignell – Tan – O'Halloran 2017), televisiomainokseen (O'Halloran – Lim 2014), television vaaliväittelyyn (O'Halloran 2011) ja luokkahuonediskurssiin (Lim 2011).

SF-MDA laajentaa siis kaikki systeemis-funktionaalisen teorian osa-alueet koskemaan myös symboliresurssia ja kuvaresurssia. Luvussa 3 hyödynnän SF-MDA:sta erityisesti ajatuksia siitä, miten merkityksiä luodaan eri semioottisten resurssien intersemioottisilla suhteilla. Tekstin merkitys rakentuu kaikkien tekstissä käytettävien semioottisen resurssin yhteisvaikutuksena (Lemke 1998[6]: 17; O'Halloran 2005: 159). Intersemioottiset ilmiöt laajentavat semanttista merkitystä niin tehokkaasti, että mikään semioottinen resurssi ei yksin pysty vastaavaan (O'Halloran 2015b: 298).

Tekstin osan mukaan vaihtelee, mikä semioottinen resurssi on pääasiallinen ja mikä avustava tai täydentävä (O'Halloran 2005: 94). Semioottisten resurssien välillä tapahtuu siis *makrosiirtymiä*, mikä tarkoittaa sitä, että joko koko pääasiallinen semioottinen resurssi vaihtuu tai että semioottisen resurssin merkityspotentiaalia täydennetään toisella semioottisella resurssilla (O'Halloran 2005: 161, 169; 2007b: 93–94). Teksteissä tapahtuu lisäksi koko ajan *mikrosiirtymiä*, eli pääasiallisesti tiettyä semioottista resurssia käyttävään osaan upotetaan toista semioottista resurssia (O'Halloran 2005: 161, 170; 2007b: 93–94). Semioottiset siirtymät ovat siis selviä semioottisen resurssin vaihtoja (O'Halloran 2008a: 235–236). Niitä voidaan käyttää esimerkiksi siihen, että päästään käsiksi toisen semiootti-

6 Sivunumero viittaa pdf-tiedostoon, jossa ei noudateta alkuperäisen julkaisun sivunumerointia.

sen resurssin merkityspotentiaaliin, jotta tarkoitteen merkitys säilyy samana (O'Halloran 2005: 179).

Semioottinen resurssi voi vaihtua esimerkiksi kesken luonnollisen kielen lauseen. Tällaista intersemioottista ilmiötä kutsutaan *semioottiseksi adoptioksi*. (O'Halloran 2005: 159, 161, 169; 2007b: 92.) Edellistä suurempi resurssien yhdistäminen puolestaan on *semioottinen sekoittuminen*, jossa jokin tekstin elementti rakentuu useammalla kuin yhdellä semioottisella resurssilla (O'Halloran 2007b: 92). Merkityksiä luodaan myös esimerkiksi sillä, miten eri semioottisten resurssien elementtejä sijoitetaan spatiaalisesti (O'Halloran 2005: 169; 2007b: 92–93).

O'Halloran (2005: 165) hyödyntää intersemioottisia ilmiöitä tarkastellessaan Limin (2004: 239) hahmotelmia siitä, millaisia suhteita intersemioottisilla resursseilla voi olla. Tekstissä esiintyviä tarkoitteita esitetään eri semioottisilla resursseilla, ja kun tarkoite esitetään uudella semioottisella resurssilla, se asetetaan uuteen kontekstiin. Jos tarkoitteen semanttiset merkitykset heijastavat tai lähestyvät toisiaan eri semioottisissa resursseissa, on semioottisilla resursseilla *yhteiskontekstoiva* (*co-contextualizing*) suhde. (Lim 2004: 239.) Yhteiskontekstoivilla suhteilla syntyy semioottista koheesiota (O'Halloran 2007b: 92). Toinen semioottisten resurssien suhde on *uudelleenkontekstoiva* (*re-contextualizing*) suhde. Semioottisilla resursseilla on uudelleenkontekstoiva suhde, jos niillä esitetyn tarkoitteen semanttiset merkitykset vaikuttavat olevan erillisiä tai ristiriidassa keskenään. (Lim 2004: 239.) Huomioin luvun 3.2 alussa näitä kontekstoivia suhteita ja sitä, miten ja miksi kontekstoinnin täsmällinen määrittäminen ei tunnu sopivan aineistoon.

Viimeinen intersemioottinen ilmiö on *intersemioottinen metafora*[7], ja siinä hyödynnetään uudelleenkontekstoivan suhteen käsitettä. O'Halloran (2005: 184–188; 2008a: 236–239) vertaa intersemioottista metaforaa kieliopilliseen metaforaan (ks. esim. Halliday 1994: 340–367). Kun tarkoite esitetään tekstissä uusilla semioottisilla resursseilla, sen merkitys muuttuu ja laajenee. Metaforinen muutos tapahtuu, kun esimerkiksi kuvan osasta tehdään metaforinen entiteetti sillä, että siihen viitataan nominalisoimalla kyseinen osa. Intersemioottisia metaforia käytetään usein tuomaan tekstiin uusia merkityksiä. (O'Halloran 2005: 179; 2007b: 94; 2008a.)

Intersemioottinen metafora ilmiönä sisältää ajatuksen kielen tasoista ja kerroksista, ja SF-MDA ottaa huomioon symboliresurssin ja kuvaresurssin kerrostumat luonnollisen kie-

7 Varhaisissa tutkimuksissaan O'Halloran puhuu *semioottisesta metaforasta*, mutta nimeää sen myöhemmin (2015a: 72) *intersemioottiseksi metaforaksi*. Termi kuvaa mielestäni käsitettä paremmin, sillä kyseessä on nimenomaan intersemioottinen ilmiö.

len kerrostumien tavalla (stratifioitumisesta ks. esim. Halliday 1978: 128–130). En tässä tutkimuksessa suuntaa erityistä huomiota tasoihin tai kerrostumiin. Toki kun luvussa 4 käsittelen metafunktioita, keskityn (implisiittisesti) semanttiseen kerrokseen, sillä Hallidayn (1978: 128) mukaan metafunktiot ovat osa sitä. Seuraavaksi luonkin lyhyen katsauksen metafunktioihin.

Yksi tämän tutkimuksen kannalta relevantti systeemis-funktionaalisen teorian ajatuksista on, että kielellä on yhtä aikaa useita eri funktioita. Halliday (1978: 21–22) kuvaa, että kielellä yhtä aikaa luodaan ja rakennetaan ensinnäkin teoriaa maailmasta, toiseksi loogisia yhteyksiä, kolmanneksi sosiaalisia suhteita ja neljänneksi yhtenäistä tekstiä. Näitä funktioita Halliday (mts. 27) nimittää metafunktioiksi. Välillä hän erottaa metafunktioita kolme, välillä neljä (mts. 123, 128).

Ideationaalisella metafunktiolla viitataan siihen, miten kokemusteoriaa konstruoidaan. Ideationaalinen metafunktio voidaan jakaa vielä kahtia eksperientiaaliseen ja loogiseen metafunktioon, jolloin eksperientiaalisella metafunktiolla tarkoitetaan maailman ja merkitysten konstruointia ja loogisella metafunktiolla taas lauseiden välisiä loogis-semanttisia yhteyksiä (Halliday 1978: 21–22, 128, 132). *Interpersoonaisella metafunktiolla* viitataan puolestaan siihen, miten kielellä konstruoidaan rooleja eli luodaan ja ylläpidetään sosiaalisia suhteita ja toisaalta sitä, miten luodaan suhtautumista asioihin (mts. 21–22). *Tekstuaalisen metafunktion* alueeseen kuuluu sitten kieli itsessään eli se, miten tekstistä tai lausumasta tehdään kohesiivinen tilanteeseen sopiva kokonaisuus (mts. 22).

O’Halloran (2005: 67–83) laajentaa metafunktioita luonnollisesta kielestä ja tarkastelee myös symboli- ja kuvaresursseissa toteutuvia metafunktioita. Hän erottaa matemaattisesta tekstistä neljä metafunktiota (mp., mts. 167–169). Toisinaan O’Halloranilla on vain kolme metafunktiota, ja esimerkiksi kuvaresurssista hän ei ensin erota loogista metafunktiota lainkaan (mts. 135–137), vaikka heti perään kuvaa analysoidessaan sitten puhuukin neljästä metafunktiosta (mts. 138, 142). Kolme metafunktiota on esillä myös silloin, kun O’Halloran (mts. 164) lainaa Roycelta (1998: 29), sillä Royce (mp., mas. 26–27) erottelee vain kolme metafunktiota.

Teorian tasolla olen sitä mieltä, että metafunktioita on neljä. Fennistiikassa niitä erillisinä käsittelee esimerkiksi Shore (2012: 161). Tässä tutkimuksessa en kuitenkaan näe järkeväksi erottaa ideationaalisesta metafunktiosta eksperientiaalista ja loogista metafunktiota erillisiksi, vaan tarkastelen pelkkää ideationaalista metafunktiota. Metafunktioiden erottelu ei olisi järkevää, sillä havainnoin ideationaaliseen metafunktioon liittyviä asioita paljon jo luvussa 3. Kyseisessä luvussa fokus kuitenkin on metafunktioiden sijaan tehtävien rakenteessa, semioottisten resurssien käytössä ja intersemioottisissa ilmiöissä, joten luvussa 3 en erikseen eksplikoi, että tietyt havainnot liittyvät nimenomaan ideationaaliseen metafunktioon. Kuten edellä tuli ilmi, pohdin metafunktioihin kuuluvia asioita luvussa 4.

3 Semioottiset resurssit rakentamassa esimerkkitehtäviä

Matematiikan oppimateriaaleista on O'Halloranin (2005: 189) mukaan erotettavissa erilaisia alagenrejä tai jaksoja, kuten esimerkkitehtäviä ja niiden ratkaisuja, määritelmiä ja niiden selityksiä sekä teoreemia eli lauseita ja niiden todistuksia. Matematiikassa lause tarkoittaa sellaista matemaattista teoriaa, jonka on todistettu olevan totta, ja yleensä lauseen yhteydessä on siis myös lauseen todistus. Lauseita ja niiden todistuksia ei oppimateriaaleissa yleensä esitetä vielä lukion alkuvaiheessa, sillä todistuksen loogisten johtopäätösten seuraaminen vaatii usein enemmän matematiikan tietoja ja taitoja kuin lukion alkuvaiheen opiskelijoilla on. Edellä mainittujen jaksojen lisäksi oppimateriaalit toki sisältävät harjoitustehtäviä, jotka on tarkoitettu tehtäväksi joko oppitunnilla tai kotona itsenäisesti. Kaikista jaksoista aineistoon on rajattu tarkasteltavaksi pelkästään esimerkkitehtävät ja niiden ratkaisut, kuten aiemmin on jo kuvattu.

Vaikka edellä nimitinkin alagenrejä jaksoiksi, ei jaksojen määrittely tässä yhteydessä ole Swalesin (1990) tai Hasanin (1986 [1985]) tarkoittama jakso, sillä määrittely ei pohjaudu jaksojen vaiheiden ja niitä toteuttavien askelien kielellisiin piirteisiin. Tällainen jaksojen määrittely olisi oman tutkimuksensa kohde. Sen sijaan jaksojen määrittely on pikemminkin edellä mainitun O'Halloranin (2005: 189) kuvailun ja tutkijan intuitioni varassa. Jaksojen osalta tässä tutkimuksessa oleellisinta on, että tutkimuksen kohteena oleva aineisto koostuu sellaisista tehtävistä, joihin esitetään heti tehtävänannon jälkeen ratkaisu. Kuten alussa kuvasin, on kyseessä oletettu tekstilaji.

Multisemioottisista teksteistä tekstien osia hahmotetaan monella tavalla. Kuvaan seuraavaksi muutamia eri hahmotustapoja. O'Halloran käyttää vuoden 2005 (s. 159) tutkimuksessaan Kokin (2004: 134) luonnehdintaa, eli he molemmat hahmottavat multisemioottisesta tekstistä metodologisesti perusteltuja näkyviä kokonaisuuksia, joissa käytetään yhtä tai useampaa semioottista resurssia. Myöhemmin O'Halloran (2008a: 234–235, 240) on soveltanut Baldryn ja Thibaultin (2006: 144) ajatuksia siitä, että tekstit muodostuvat eri skalaaritason hierarkkisista komponenteista, ja O’Halloran onkin jakanut matematiikan esimerkkitehtävän pienempiin tarkasteltaviin palasiin kuin aiemmassa tutkimuksessaan. Kyseisessä tutkimuksessa O’Halloran (2008a: 239–240) määrittää tehtävän ratkaisun alakomponenteiksi siitä huolimatta vain kuvaresurssia käyttävät kohdat, mikä ei tämän tutkimuksen kannalta ole mielekkäin lähestymistapa. Vaikka hän siis analyysissään käsittelee koko ratkaisun sisältöä, jää kuvaresurssin ulkopuolinen sisältö ikään kuin hahmottomaksi massaksi.

Baldry ja Thibault (2006: 31) ajattelevat edellä mainitun lisäksi, että multisemioottinen sivu koostuu yhdestä tai useammasta klusterista eli toisiaan lähellä olevista elementeistä, jotka muodostavat jonkin loogisen kokonaisuuden ja ovat siten tietty sivun osa. Lisäksi esimerkiksi Bateman (2008: 143–144, 163, 176) vertaa elementtien järjestymistä sivulla retorisen rakenteen teoriaan: sivu tai aukeama on retorinen yksikkö, sillä olevien elementtien yhdistelmällä on merkityksensä ja elementtien väliset suhteet muodostavat retorisen rakenteen.

Mikään yksittäinen edellä kuvatuista tavoista, joilla multisemioottisesta tekstistä erotetaan tekstin osia, ei tunnu sopivan aineistoon ja tämän tutkimuksen päämäärään. Esimerkiksi O’Halloranin (2008a: 239–240) tarkinkin määrittelytapa jättää erottelematta ison osan tekstistä. Yhdistänkin kaikkia edellä olevia luonnehdintoja multisemioottisen tekstin osista. Ajattelen, että tutkittavassa aineistossa on jaksoja, joissa on kokonaisuuksia, ja kokonaisuudet puolestaan koostuvat erilaisista elementeistä, jossa voi olla yhtä tai useampaa semioottista resurssia. Edellä esitellyissä määritelmissä tekstien osista käytetään eri termejä. Koska mukailen useaa eri määritelmää, en käytä minkään yksittäisen määritelmän mukaisia nimityksiä tekstin osista. Nimitänkin jakson sisällä esiintyviä selvärajaisia sisällöllisiä kokonaisuuksia *yksiköiksi*. Ne vastaavat lähimmin sellaista O’Halloranin (2005: 159; 2007b: 87–88; 2008a: 239–240) hahmottamaa kokonaisuutta, jota hän kutsuu tutkimuksissaan nimellä *Item*. Määrittelen yksikköjen koostuvan yhdestä tai useammasta *osasta*. *Osa* on kohesiivinen sisällöllinen kokonaisuus, joka on useimmiten erotettavissa spatiaalisesti. Osassa voi olla käytössä yksi semioottinen resurssi tai useita semioottisia resursseja. Tismalleen osaa vastaavaa komponenttia ei ole O’Halloranin (mp.) tutkimuksissa, sillä hän tarkastelee usein osaa suurempia kokonaisuuksia.

Aineiston jokaisen esimerkkitehtävän yksiköt ja osat on merkitty liitteen (s. 76–) kaavioihin 1–15 (s. 77–105). Esimerkkitehtävät esitetään kontekstissaan liitteen kuvissa 1–15 (s. 76–104). Liitteen järjestys on siis seuraava. Aineiston teokset ovat teoksen nimen mukaisessa aakkosjärjestyksessä ja esimerkit siinä järjestyksessä kuin ne teoksessa ovat. Ensin on kuva kirjan koko sivusta, ja seuraavalla sivulla on puolestaan kaavio esimerkkitehtävän yksiköistä ja osista. Kun esittelen esimerkkitehtäviä tästä eteenpäin, viittaavat kaikki sivunumerot selvyyden vuoksi tähän teokseen eli liitteeseen ellei muuta mainita. Vaikka viitteessä on kustakin teoksesta aiemmin muodostamani lyhenne, en siis viittaa alkuperäisen teoksen sivunumerointiin. Jotta olisi kuitenkin selvää, missä kukin esimerkki sijaitsee alkuteoksessa, annan viitteessä lyhenteenä esimerkkitehtävän numeron: ”e1” tarkoittaa esimerkkiä 1, ja eräästä eri tavalla nimetystä Johdanto-esimerkistä käytän lyhennettä ”j”. Esimerkiksi siis ”LYM e1, s. 76–77” tarkoittaa *Lukion yhteisen matematiikan* esimerkkiä 1, joka esitetään konteksteineen sekä yksikköineen ja osineen liitteen sivuilla 76–77.

Tämän luvun ensimmäisessä alaluvussa esittelen, millaisia yksikköjä ja osia esimerkkitehtävistä on hahmotettavissa ja miten niissä käytetään eri semioottisia resursseja. Toisessa alaluvussa puolestaan erittelen osarajojen yli ulottuvia intersemioottisia ilmiöitä ja erityisesti sitä, miten tarkoitteiden merkitykset rakentuvat, kun käytössä on kolme semioottista resurssia.

3.1 Semioottiset resurssit esimerkkitehtävien osissa ja yksiköissä

Esimerkkitehtävistä on erotettavissa seuraavia yksikköjä: *tehtävä*, *ratkaisu* ja *vastaus* sekä mahdollisesti tehtävän tai ratkaisun sisältöön liittyvä mutta tehtävän tai ratkaisun ulkopuolinen *selitys*, *ohje* tai *visuaalistus*. Esimerkkitehtävää ei voi olla ilman *tehtävän* ja *ratkaisun* yksikköä, sillä muuten ei määritelmällisestikään olisi kyse esimerkkitehtävästä. Kaikki muut yksiköt ovat valinnaisia yksikköjä, eli yksikköjä, jotka voivat esiintyä tai olla esiintymättä. Yksikköjen järjestys on väistämättä *tehtävä*, *ratkaisu*, *vastaus*, sillä jokin muu järjestys olisi perin eriskummallinen.

Tehtävän yksikkö koostuu kolmesta pakollisesta osasta: *otsikosta*, *ongelman perustiedoista* ja *direktiivistä* eli käskystä tai kysymyksestä. *Otsikon* jälkeen tulevien osien esiintymisjärjestys on vapaa, eli tehtävänannossa voi olla kumpi tahansa ensin, joko *ongelman perustiedot* tai *direktiivi*. O’Halloranin (2005: 94) mukaan tyypillinen matematiikan esimerkkitehtävän järjestys on seuraava: Ensin matematiikan ongelma esitellään, kuvataan ja sijoitetaan kontekstiin luonnollisella kielellä. Sitten kuvaresurssilla visualisoidaan ongelma. Lopuksi ongelma ratkaistaan symboliresurssilla. (Mp.) Aineistossa ei ole havaittavissa tällaista O’Halloranin hahmottelemaa esimerkkitehtävän järjestystä, mikä johtunee ainakin siitä, että tämän tutkimuksen aineisto on asiasisällöltään erilaista kuin O’Halloranin tutkimusten aineistot. *Ratkaisussa* olevien osien esiintymisjärjestys on siis hyvin vapaa, ja yksikössä voi *otsikon* lisäksi olla yksi tai useampi *tulkinta*, *lasku* tai *visuaalistus*. Viimeinen yksikkö eli *vastaus* sisältää aina *otsikon* ja *vastauksen*. Seuraavaksi näytän osa kerrallaan, mitä semioottisia resursseja kussakin osassa käytetään. Käsittelen erilliset *selityksen* ja *ohjeen* pikkuyksiköt viimeisinä.

3.1.1 *Otsikko*

Käsittelen ensimmäisenä *otsikko*-osan, sillä kyseinen osa esiintyy jokaisen esimerkkitehtävän jokaisessa *tehtävän*, *ratkaisun* ja *vastauksen* yksikössä. *Selityksen* ja *ohjeen* yksiköt eivät siis sisällä *otsikon* osaa. Aineiston kaikissa teoksissa esimerkkitehtävien yksiköt nimetään otsikoilla, jotka erotetaan muusta tekstistä visuaalisesti ja spatiaalisesti. *Otsikoiden* pääasiallinen semioottinen resurssi on luonnollinen kieli. Yksikköjen *otsikot* sijaitsevat sivun vasemmassa laidassa, kuten matematiikan oppimateriaaleissa on perinteisesti tapana (vrt. O’Halloran 2007b: 87). Spatiaalisella sijoittelulla ja yksikköjen otsikoinnilla pohjustetaan alkavat yksiköt uudeksi ja tärkeäksi tiedoksi. *Otsikoiden* spatiaalisen sijoittelun sivulla voi havaita esimerkiksi liitteen kuvista 1 (s. 76, LYM), 7 (s. 88, OM) ja 10 (s. 94, YT).

Taulukossa (s. 21) ovat aineiston kaikki erilaiset *otsikko*-osat. Otsikoiden visuaaliset erotustavat vaihtelevat eri teoksissa. Kaikkien teosten *tehtävän otsikot* kirjoitetaan versaalein ja niissä käytetään eri kirjasinta kuin varsinaisessa tekstissä. Väripohjalla olevat otsikot ovat väripohjan takia erityisen salientteja elementtejä. Kun elementti on *salientti*[8], tarkoittaa se sitä, että elementti on silmiinpistävän kohosteinen eli huomio kiinnittyy siihen. Elementin salienssi muodostuu esimerkiksi elementin sijoittelusta, koosta ja värikontrasteista. (Kress – van Leeuwen 2006: 177, 202.)

Tehtävän otsikko nostetaan siis kaikissa teoksissa *ratkaisun* ja *vastauksen otsikkoa* tärkeämpään rooliin: *Lukion yhteisessä matematiikassa* kaikki otsikot ovat lihavoituja ja alleviivattuja, mutta *ratkaisua* ja *vastausta* ei kirjoiteta enää versaalein vaan vain isolla alkukirjaimella. *Otavan matematiikassa* puolestaan ei ole *ratkaisun* otsikossa enää mitään korostusväriä ja otsikko on samaa kirjasinta kuin varsinainen teksti, mutta varsinaisesta tekstistä *ratkaisun* otsikko erotetaan kapiteelikirjaimin. Tulkitsen otsikon olevan kapiteelikirjaimia ilman isoa alkukirjainta, sillä kirjaimet eivät ole yhtä korkeita kuin varsinaisen teks-

8 Salienssista käytetään myös muita käännöksiä, esimerkiksi *esiintyöntyvyys* (esim. Heikkilä 2006), *huomioarvo* (esim. Mikkonen 2012) ja *erottuvuus* (esim. Nikula 2012).

Taulukko. *Otsikko*-osat.

	Lukion yhteinen matematiikka	*Otavan matematiikka*	*Yhteinen tekijä*
Tehtävän otsikko tai otsikot	ESIMERKKI 1	JOHDANTO ESIMERKKI 1	ESIMERKKI 1 ESIMERKKI 3 ESIMERKKI 5
Ratkaisun otsikko	Ratkaisu	RATKAISU	RATKAISU
Vastauksen otsikko	Vastaus		VASTAUS

tin isot alkukirjaimet ovat. *Yhteisessä tekijässä ratkaisun* ja *vastauksen* otsikot ovat yhä muusta tekstistä eroavaa kirjasinta ja versaaleja, mutta salientin väripohjan sijaan korostuskeinona on enää otsikon ylä- ja alapuolella oleva värillinen pisteviiva.

Otavan matematiikassa on kaksi erilaista *tehtävän otsikkoa*, koska teoksen alalukujen ensimmäinen esimerkkitehtävä on nimetty muista esimerkeistä poikkeavalla tavalla. Myös *Yhteisen tekijän* alaluvut alkavat muista esimerkkitehtävistä eroavalla esimerkillä, mutta *Yhteisen tekijän* Tutkimus-esimerkki ei kuulu tutkittavaan aineistoon, sillä – toisin kuin Johdanto-esimerkkiin – siihen ei esitetä ratkaisua. *Lukion yhteisessä matematiikassa* ei ole mitään luvun aloittavaa muista poikkeavaa esimerkkiä, vaan kaikki esimerkit ovat samanlaisia riippumatta siitä, esitetäänkö ne alaluvussa ennen teoriatekstiä vai sen jälkeen. Nämä ovat aineiston teoksissa havaittavia didaktisia eroja. Yksi didaktisista eroista on myös se, ettei *Otavan matematiikassa* ole yhdessäkään tehtävässä *vastauksen* yksikköä, ja siksi siis taulukossa ei ole myöskään kyseisen teoksen *vastauksen otsikkoa*.

Erilaisia *tehtävän otsikoita* on myös *Yhteisessä tekijässä*, kuten taulukosta voi havaita. Kahdessa ensimmäisessä esimerkkitehtävässä otsikossa on logo. *Tehtävän otsikossa* on siis semioottinen upotus eli avustavana semioottisena resurssina on kuvaresurssi. Logosta kerrotaan teoksen sivulla 3: ”Kirjaan on merkitty esimerkit, jotka on tarkoitus oppia tekemään ilman laskinta.” Myös muiden otsikoiden merkitykset kerrotaan samalla sivulla, ja vihreällä väripohjalla olevan otsikon kerrotaan merkitsevän, että esimerkki on syventävä esimerkki.

3.1.2 *Ongelman perustiedot*

Seuraavaksi siirrytään itse tehtävänantoon. Kuten aiemmin kerroin, on esimerkkitehtävässä aina sekä *ongelman perustiedot* että *direktiivi*. Käsittelen ensin *ongelman perustietojen* osan, sillä aineiston esimerkkitehtävät alkavat useammin sillä kuin *direktiivillä*: *ongelman perustiedot* aloittaa tehtävänannon kahdeksassa esimerkkitehtävässä ja *direktiivi* puolestaan viidessä. *Ongelman perustiedoissa* kuvaillaan jonkinlainen asiaintila, joka joko jätetään abstraktiin kontekstiin tai sidotaan reaalimaailman kontekstiin. Asiaintilan kuvailussa eli *ongelman perustiedoissa* käytetään useimmiten pääasiallisena semioottisena resurssina luonnollista kieltä, minkä on havainnut myös O'Halloran (2005: 94). Luonnollista kieltä avustetaan symboliresurssilla joko semioottisen adoption tai semioottisen sekoittumisen mikrosiirtymillä. Avustavana resurssina voi olla myös kuvaresurssi. Toisinaan *ongelman perustiedot* saatetaan esittää pelkällä symboliresurssillakin. Tämä poikkeaa O'Halloranin (mp.) havainnoista, minkä syynä voi olla se, että tässä tutkimuksessa tekstin komponentit määritellään eri tavalla kuin O'Halloranin tutkimuksessa.

Luonnollisen kielen semioottinen resurssi on erityisen suuressa roolissa niissä *ongelman perustiedoissa*, joissa tehtävä sidotaan reaalimaailman kontekstiin. Tällaisia tehtäviä kutsutaan alan slangissa kontekstitehtäviksi. O'Halloranin (2005: 36) mukaan kontekstitehtävää käytetään yleensä, jotta lukija arvostaisi seuraavaksi esiteltävää tai kehiteltävää teoriaa, eli huomaisi, miten käyttökelpoinen uusi teoria on. Tarkoituksena on siis motivoida tekstin lukijaa opiskelemaan uutta matematiikan asiaa. Matematiikan didaktiikkaa tarkastelevien Ahteen ja Pehkosen (2000: 34) mielestä matematiikan luonnetta heijastaa erityisesti se, kun matemaattinen teoria kehitetään reaalimaailman kontekstin pohjalta tai teoriaa sovelletaan käytännön tilanteeseen. Lisäksi kontekstitehtävät täyttävät opetussuunnitelman määrittelemiä tavoitteita. Näitä tavoitteita ovat ensiksi se, että matematiikan oppiaineen koko opetuksen tulisi lähteä opiskelijoita kiinnostavista aiheista ja ilmiöistä ja niihin liittyvistä ongelmista. Edelleen yhtenä ensimmäisen kurssin tavoitteista on, että opiskelija osaa ratkaista käytännön ongelmia erilaisten lukujonojen avulla. (LOPS 2015: 129–130.)

Varsinaisia kontekstitehtäviä aineistossa on kaksi (LYM e1, s. 76–77 ja YT e5, s. 104–105). Muita esimerkkitehtäviä en laske kontekstitehtäviksi. Missään muussa tehtävässä ei anneta varsinaista reaalimaailman kontekstia tehtävän asiaintilalle, vaikka yhden tehtävän (OM j, s. 86–87) kuviojonon piirroskuva saattaakin ensi silmäyksellä vaikuttaa reaalimaailman kontekstilta. Tähän esimerkkitehtävään palaan hieman myöhemmin.

Kuvissa 1 ja 2 on molempien kontekstitehtävien *ongelman perustiedot*. Ensimmäisen kuvan esimerkissä käytetään luetelmaa, jolloin visuaalisella asettelulla korvataan ellipsi eli toisto. Luetelma on merkitty värillisillä palloilla. On hiuksenhienoa rajanvetoa, edustavatko tehtävän numeromerkein annetut luvut luonnollista kieltä vai matematiikan symboli-

Fysioterapeutti antaa toipilaalle kaksi eri treeniohjelmaa.

- Ensimmäisessä ohjelmassa kävelylenkin pituus kasvaa joka päivä 50 metrillä.
- Toisessa ohjelmassa kävelylenkin pituus kasvaa päivittäin 20 %.

Kuva 1. *Ongelman perustiedot* ensimmäisessä kontekstitehtävässä.
(LYM e1, s. 76–77)

Tulitikkurasioista rakennetaan pyramidin muotoinen rakennelma. Lukujono $a_n = 432 - 13n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, kuvaa rasioiden määrää eri kerroksissa. Kerrokset numeroidaan alimmasta kerroksesta alkaen.

Kuva 2. *Ongelman perustiedot* toisessa kontekstitehtävässä.
(YT e5, s. 104–105)

resurssia, jolloin kyseessä olisi semioottinen adoptio. Lasken ilmaukset kuitenkin luonnolliseksi kieleksi, sillä pituusmitat ja prosentit ovat tarkoitteita, jotka esiintyvät yleisesti myös muualla kuin tiukan matemaattisissa teksteissä. Toisessa esimerkissä puolestaan on semioottisen adoption mikrosiirtymä: symboliresurssilla esitetään entiteetti, joka nimetään tukisubstantiivilla *lukujonoksi*.

Sivusin edellä esimerkkitehtävää, jonka kuviojonon piirroskuva saattaa näyttää reaalimaailman kontekstilta, mutta *ongelman perustiedoissa* tehtävälle ei varsinaisesti anneta reaalimaailman kontekstia. Kyseisen esimerkkitehtävän *ongelman perustiedot* -osa on kuvassa 3.

Kuviojono muodostuu tietyn säännön mukaan piirretyistä kuvioista.

Kuva 3. *Ongelman perustiedot*, jossa avustavana resurssina on kuvaresurssi.
(OM j, s. 86–87)

Ongelman perustiedoissa luonnollisen kielen resurssia avustetaan kuvaresurssilla, jota on upotettu osan sisään, eli osan sisällä on semioottista sekoittumista. Kuvien muodostama kokonaisuus nimetään alun virkkeessä *kuviojonoksi*, eli kuvaresurssilla laajennetaan *kuviojonon* entiteetin merkitystä. Luonnollisella kielellä ja kuvaresurssilla on tässä uudelleenkontekstoiva suhde, sillä kun *kuviojono* esitetään uudella semioottisella resurssilla, sen merkitys eroaa täysin siitä, mitä se ensimmäisellä resurssilla esitettynä oli. Tässä on kyseessä intersemioottinen metafora, jossa koko kuvaresurssilla esitettävä entiteettien kokonaisuus nominalisoidaan. Kuvaresurssin sisällä on semioottinen adoptio, sillä yksittäiset piirroskuvat nimetään.

Kontekstittomissa tehtävissä *ongelman perustietojen* osan pituus vaihtelee, ja toisinaan osa on hyvin lyhyt. Kaikissa kontekstittomissa tehtävissä *ongelman perustiedoissa* on runsaasti semioottista adoptiota ja erilaisia mikrosiirtymiä luonnollisesta kielestä symboliresurssiin. Seuraavana on pari esimerkkiä siitä, millaisia *ongelman perustiedot* voivat lyhimmillään olla.

1) Lukujono on −3, 1, 1, 3, 5, …

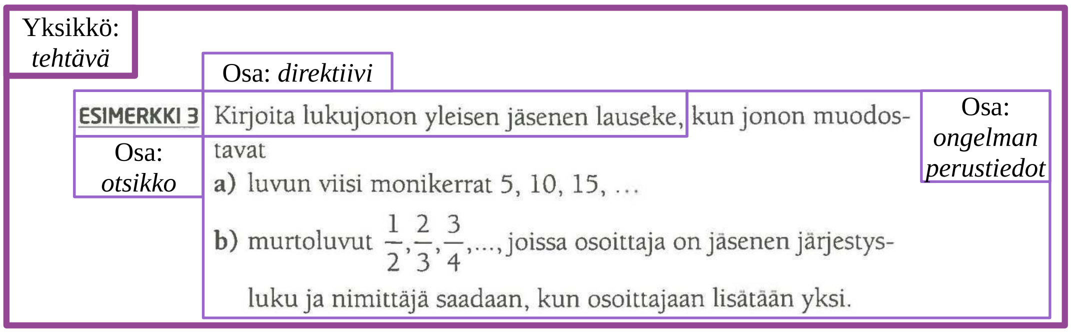
(OM e2, s. 90–91)

2) Lukujonon yleinen jäsen on $a_n = 3 \cdot 2^{n-1},\ n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$.

(YT e4, s. 100–101)

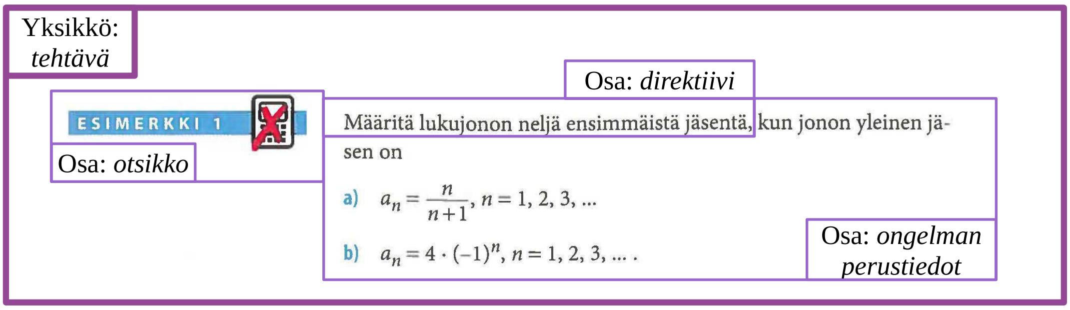
Molemmissa esimerkeissä *ongelman perustiedot* ovat vain yksi luonnollisen kielen virke, jossa on matematiikan symboliresurssia semioottisena adoptiona. Molemmissa on ekvatiivilause, jossa annetaan ensin luonnollisen kielen entiteetti, *lukujono* ja *lukujonon yleinen jäsen*, joka samastetaan symboliresurssilla esitettävään entiteettiin.

Ongelman perustietojen ja direktiivin osaraja kulkee toisinaan luonnollisen kielen virkkeen keskeltä. Tällöin direktiivi aloittaa tehtävänannon, ja virkkeellä, joka alkaa direktiivin osassa, on alisteinen sivulause, joka puolestaan aloittaa ongelmien perustietojen osan. Kaavioissa 1–3 (s. 25) on tällaisten esimerkkitehtävien tehtävän yksiköt osineen. Osien rajan voisi hahmottaa näissä spatiaalisen asettelun perusteella toisinkin ja ajatella *kun*-konjunktion kuuluvan *direktiiviin*, mutta koska osan yhtenä kriteerinä on, että osa on kohesiivinen kokonaisuus, lasken koko alisteisen lauseen kuuluvan *ongelman perustietoihin*. Kaikissa esimerkeissä alisteinen *kun*-lause aloittaa luetelman, jonka alakohdat jatkavat alisteista lausetta. Luetelma eli tehtävän alakohdat merkitään eri tavoin typografisesti korostetulla tekstillä. Alakohdan alkua merkitsevä kirjain voidaan pelkästään lihavoida, mikä ei ole aineistossa tyypillisin tapa. Yleisin tapa on siis se, että alakohdan alkua merkitsevä kirjain ja sulje ovat värillisiä ja niissä käytetään leipätekstistä poikkeavaa kirjasinta.



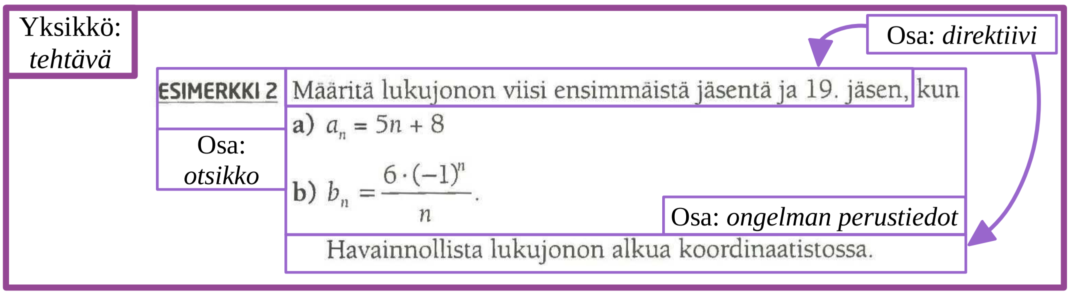
Kaavio 1. Yksi esimerkki, jossa *tehtävän* yksikössä osien raja kulkee luonnollisen kielen virkkeen keskeltä.

(LYM e3 s. 82–83)



Kaavio 2. Toinen esimerkki, jossa *tehtävän* yksikössä osien raja kulkee luonnollisen kielen virkkeen keskeltä.

(YT e1 s. 94–95)



Kaavio 3. Kolmas esimerkki, jossa *tehtävän* yksikössä osien raja kulkee luonnollisen kielen virkkeen keskeltä.

(LYM e2 s. 78–79)

Ensimmäisessä esimerkissä pääasiallinen resurssi on luonnollisen kielen resurssi. Esimerkissä symboliresurssilla esitettävät entiteetit nimetään joko appositiorakenteella (*luvun viisi monikerrat*) tai tukisubstantiivilla (*murtoluvut*). Tukisubstantiivin käyttö on ilmiö, joka havaittiin jo hieman aiemmin. Myös toisessa esimerkissä on aiemmin havaittu ilmiö eli siinä on vastaava ekvatiivilause kuin esimerkit 1 ja 2 olivat. Toisessa esimerkissä on vaikeaa sanoa, kumpi resursseista on pääasiallinen ja kumpi avustava, sillä resurssien käyttödistribuutio on niin tasainen. Symboliresurssilla esitettävät lukujonon yleiset jäsenet ovat kuitenkin spatiaalisen sijaintinsa perusteella tärkeämmässä roolissa, mikä johtuu sekä symboliresurssin yleisestä salienssista luonnollisen kielen tekstiin verrattuna että teoksen taittopohjasta eli layoutista, eli käytännössä siitä, että teoksessa on aina vertikaalinen tila ennen tehtävän alakohtia ja alakohtien välissä.

Viimeisessä esimerkissä eli kaaviossa 3 on ilmiö, jota ei ole aiemmissa esimerkeissä vielä esiintynyt. Siinä alisteisen lauseen predikaattina on symbolimerkki molemmissa tehtävän alakohdissa. Symboliresurssi ja luonnollisen kielen resurssi kietoutuvat tässä siis todella yhteen. Ilmiö on mielenkiintoinen, ja palaan tällaisiin lauseisiin luvussa 4.

Luvun alussa kerroin, että *ongelman perustiedot* saatetaan esittää pelkällä symboliresurssillakin. Tällaisia tehtäviä aineistossa on kaksi (LYM e4, s. 84–85 ja OM e1, s. 88–89), ja toinen näistä on kaaviossa 4 (s. 27). Kumpikin *ongelman perustiedoista* sisältää luetelman eli tehtävän alakohdat, eli symboliresurssiin on upotettu visuaalisesti korostettu luonnollisen kielen luetelma semioottisena adoptiona.

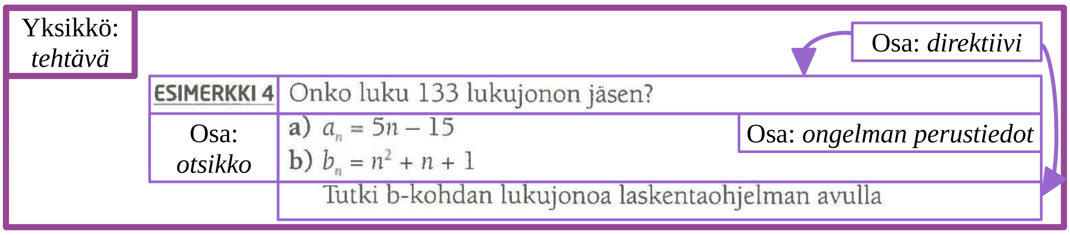
3.1.3 *Direktiivi*

Seuraavaksi käsittelen *direktiivin* osan. *Direktiivin* osassa on joko imperatiivi tai kysymys. Nimitän osaa *direktiiviksi*, koska sekä imperatiivi että kysymys ovat tässä kontekstissa ohjailevia lausumia eli niiden funktiona on käynnistää ongelman ratkaisun toiminta. *Direktiivin* osan pääasiallinen semioottinen resurssi on luonnollinen kieli. Käskylauseita on aineistossa enemmän, 16 kappaletta, kun taas kysymyslauseita on kahdeksan.

Direktiivissä on usein mikrosiirtymiä eli symboliresurssia upotetaan semioottisena adoptiona, mutta adoptiota suurempaa semioottista sekoittumista ei aineiston *direktiiveissä* ole. Tehtävän alakohdat eli typografisin keinoin korostettu ellipsi sijaitsee lähes yhtä usein *direktiivissä* kuin *ongelman perustiedoissa*: tehtävän alakohdat ovat *direktiivissä* seitsemässä tehtävässä, ja *ongelman perustiedoissa* ne puolestaan ovat kuudessa tehtävässä. Jälkimmäisiin lasken mukaan esimerkkitehtävän, jonka *ongelman perustiedot* nähtiin kuvassa 1 (s. 23). Vaikka siinä ei ole varsinaisesti alakohtia, on siinä visuaalisesti korostettu ellipsi ja sisällöllisesti kaksi eri kysymyskohtaa.

Ongelman perustietojen osaa käsitellessä kaavioissa 1–3 (s. 25) esittelin sellaiset ongelman perustiedot, joissa osan raja menee kesken luonnollisen kielen virkkeen. Näissä tapauksissa direktiivin osaan jää siis päälause eli hallitseva lause.

Kaaviossa 3 on tämän lisäksi ilmiö, joka on myös aineiston toisessa esimerkkitehtävässä. Kyse on siis siitä, että *direktiivin* osa jakaantuu kahteen palaan. Toisen tällaisen esimerkkitehtävän *tehtävän* yksikkö on kaaviossa 4. Molemmissa tehtävissä annetaan tehtävän alakohtien luetelman jälkeen uusi käsky.



Kaavio 4. *Tehtävän* yksikkö, jossa *direktiivin* osa on kahdessa palassa.
(LYM e4, s. 84–85)

Tekstin spatiaalinen sijoittelu kantaa merkitystä, sillä tekstin sijainnilla osoitetaan esimerkiksi alakohtien alkaminen ja se, mihin alakohtaan mikäkin elementti liittyy. Onkin siis erikoista, että kaaviossa 3 (s. 25) toinen käsky on sisennetty ikään kuin se koskisi vain toista alakohtaa, vaikka se selvästi koskee molempia alakohtia. Olisi perusteltua, että teksti olisi sijoitettu alkamaan samasta kohdasta kuin molempia alakohtia koskeva aloituskin eli *direktiivin* ensimmäinen puolikas. Kaaviossa 4 puolestaan spatiaalinen sijoittelu on loogisempi, sillä käsky koskee vain jälkimmäistä alakohtaa. Käsky erotetaan alakohdan sisäisellä rivinvaihdolla, eli tässä erotetaan alakohdan sisällä kaksi osaa, joissa käytetään eri semioottisia resursseja.

3.1.4 *Lasku*

Seuraavaksi siirryn pääasiassa *ratkaisun* yksikössä sijaitseviin osiin. Käsittelen niistä ensimmäisenä yksinkertaisimman osan eli *laskun*. Jo osan nimestä voinee arvata, että osassa lasketaan jotakin ja osan pääasiallinen semioottinen resurssi on siis symboliresurssi lähes aina. Yhteensä aineistossa on kolmetoista *laskun* osaa, ja ne sijaitsevat seitsemässä eri esimerkkitehtävässä.

O'Halloranin (2005: 94) luonnehdinnan mukaan lasku tulisi matemaattisessa ongelmassa viimeisenä, mutta tutkittavassa aineistossa *laskun* jälkeen voi olla vielä *tulkinta*. Vaikka tällainen ero on havaittavissa, täytyy taas muistaa, että tässä tutkimuksessa tekstin komponentit hahmotetaan eri tavalla kuin muissa tutkimuksissa. O'Halloranhan (2007b: 87–88; 2008a: 239–240) nimeää ratkaisusta vain kuvaresurssin elementtejä. Vaikka O'Halloran ei nimeä laskutoimituksia erikseen, huomioi hän laskutoimituksen analyysissään. Kaikissa tämän tutkimuksen esimerkkitehtävissä ei ole erillistä *laskun* osaa lainkaan, sillä *laskuja* on seitsemässä tehtävässä. Tutkimusaineisto eroaa siis O'Halloranin (2005: 190; 2007b: 78; 2008a: 232) tutkimusaineistosta, sillä hänen aineistossaan ratkaisussa on aina erillinen kohta, jossa lasketaan jotakin. Palaan aineistojen eroihin, kun käsittelen *visuaalistuksen* ja *tulkinnan* osia.

Lasku erotetaan spatiaalisesti muusta tekstistä vähintään rivinvaihdolla mutta tavallisemmin vertikaalisella tilalla. Myös O'Halloran (2005: 122) on havainnut, että erityisen merkityksellisiä symbolimerkintöjä ei esitetä upotettuina luonnolliseen kieleen vaan ne erotetaan muusta tekstistä spatiaalisesti. Itse symboliresurssin spatiaalinen sijoittelu poikkeaa luonnollisen kielen resurssin käytännöistä (O'Halloran: 2005: 127–128). Aineistossa sen voi havaita esimerkiksi siitä, että laskutoimituksen tasaus ei välttämättä noudata luonnollisen kielen tekstin tasausta vaan symboliresurssin omia matemaattisia konventioitaan, jotka palvelevat symboliresurssin nopean sisäistettävyyden päämäärää. Käytännössä tämä näkyy niin, että rivejä ei välttämättä ole tasattu vasemmalle kuten muu teksti, vaan symboliresurssin teksti tasataan esimerkiksi yhtäsuuruusmerkkiin, muuhun vertailuoperaattoriin (esim. < tai >) tai toisiin matemaattisesti merkityksellisiin merkkeihin. Tekstin tasaaminen johonkin merkkiin tarkoittaa sitä, että merkki sijaitsee pystysuunnassa katsottuna tismalleen samalla kohdalla jokaisella rivillä riippumatta siitä, mitä merkkiä ennen tai sen jälkeen on. Tällaisesta spatiaalisesta sijoittelusta on esimerkkejä kuvissa 4 ja 5.

$$\begin{aligned} a_n &> 0 \\ 432 - 13n &> 0 \\ n &< \frac{432}{13} \\ n &< 33{,}23\ldots \end{aligned}$$

Kuva 4. *Laskun* symboliresurssin teksti tasattuna vertailuoperaattoriin.
(YT e5, s. 104–105)

$$
\begin{aligned}
\text{a) } 5n - 15 &= 133 \quad &&| + 15 \\
5n &= 148 \quad &&| : 5 \\
n &= 29{,}6
\end{aligned}
$$

Kuva 5. *Laskun* symboliresurssin teksti tasattuna yhtäsuuruusmerkkiin ja merkkiin, joka erottaa yhtälön operoinnin itse yhtälöstä.
(LYM e4, s. 84–85)

Laskuja, jotka sisältävät pelkkää symboliresurssia, on yhdeksän kappaletta. Symboliresurssissa saatetaan käyttää havainnollistamiseen sellaisia typografisia eli visuaalisia korostuskeinoja, jotka eivät kuulu symboliresurssin konventionaalisiin merkitystä kantaviin typografisiin keinoihin[9]. Tällainen ilmiö voidaan havaita esimerkiksi kuvasta 6.

$$
\begin{aligned}
a_1 &= \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} \\
a_2 &= \frac{2}{2+1} = \frac{2}{3} \\
a_3 &= \frac{3}{3+1} = \frac{3}{4} \\
a_4 &= \frac{4}{4+1} = \frac{4}{5}
\end{aligned}
$$

Kuva 6. Väri pedagogisena korostuskeinona *laskun* symboliresurssissa.
(YT e1, s. 94–95)

Kuvassa on *lasku*, joka sisältää pelkkää symboliresurssia, mutta tietyt symbolit on korostettu värillä laskutoimituksen sisällä. Tällaiset korostuskeinot ovat pedagogisia valintoja. Palaan tällaisiin korostuksiin luvussa 4.

Luonnollisen kielen resurssia on upotettu neljään *laskun* osaan. Vähiten luonnollista kieltä on sellaisissa *laskuissa*, joissa *laskun* osa sisältää alakohdan luetelman merkin semioottisena adoptiona. Tällainen tapaus voidaan havaita edellä olleesta kuvasta 5. *Lasku* voi sisältää myös sellaisia luonnollisen kielen ilmauksia, jotka matematiikassa esitetään symboliresurssin sijaan aina nimenomaan luonnollisella kielellä. O'Halloran (2005: 119) on havainnut, että englanniksi tällaisia sanoja ja ilmauksia ovat esimerkiksi *and*, *or*, *for example* ja *also*. Vaikuttaa siltä, että kyseessä on matematiikan symboliresurssin ilmiö, joka ei ole sidoksissa siihen, mitä luonnollista kieltä symboliresurssin ohella käytetään; tutkittavassa aineistossa on yksi esimerkkitehtävä (LYM e4, s. 84–85), jonka toinen *lasku*-osa sisältää sanan *tai* keskellä symboliresurssia.

9 Symboliresurssin typografisista keinoista lisää sivuilla 47–48.

c) Kymmenennessä kuviossa on b-kohdan perusteella

$$\underset{1.}{6} + \underbrace{\underset{2.}{4} + \underset{3.}{4} + \underset{4.}{4} + \underset{5.}{4} + \underset{6.}{4} + \underset{7.}{4} + \underset{8.}{4} + \underset{9.}{4} + \underset{10.}{4}}_{9\text{ kpl}}$$

$= 6 + 9 \cdot 4 = 42$ sinistä kuusikulmiota.

Kuva 7. Laskutoimitus osana luonnollisen kielen virkettä *laskun* osassa. (OM j, s. 86–87)

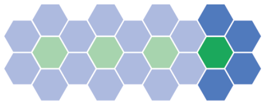
Laskun osa, jossa on eniten luonnollista kieltä, on kuvassa 7. Määritän koko luonnollisen kielen virkkeen *laskun* osaksi, sillä luvun alussa määrittelin osan olevan kohesiivinen sisällöllisesti eheä kokonaisuus. Tämä määritelmä ei toteutuisi, jos osan jakaisi kahtia niin, että osan aloittavan rivin ajattelisi olevan *tulkinnan* osa ja laskutoimituksen taas ajattelisi olevan *laskun* osa. Tässä hahmotan osan siis nimenomaan sisällöllisin perustein.

Kuvan 7 laskutoimituksen spatiaalinen sijoittelu nostaa laskutoimituksen erityisen merkitykselliseksi symbolinotaatioksi. Laskutoimituksen symboliresurssia visuaalistetaan ensin antamalla yhteenlaskettaville järjestysluvut, jotka kertovat, monennestako kuviosta yhteenlaskettava saadaan, ja sitten ryhmittelemällä yhteenlaskettavien määriä aaltosulkeella. Koko laskutoimitus upotetaan osaksi luonnollista kieltä, eli kyseessä on semioottinen sekoittuminen. Tulkitsen kyseisen osan pääasialliseksi resurssiksi luonnollisen kielen resurssin, koska se muodostaa osaan ehjän kokonaisuuden, jota avustetaan symboliresurssilla ja kuvaresurssilla.

3.1.5 *Visuaalistus*

Aineistossa on *ratkaisun* yksiköissä kolmetoista varsinaista tehtävän asiasisältöön liittyvää *visuaalistusta*, ja ne sijaitsevat kuudessa eri esimerkkitehtävässä. Lisäksi aineistossa on yksi *tehtävän* yksikössä sijaitseva *visuaalistus* ja neljä sellaista visuaalista elementtiä, joilla erotetaan jaksoja toisistaan. O'Halloranin (2005: 94) havaintojen mukaan kuvaresurssia käytetään tyypillisesti sen jälkeen, kun matemaattinen ongelma on esitelty luonnollisella kielellä, eli ennen kuin ongelma ratkaistaan symboliresurssin laskutoimituksella. Tämän tutkimuksen aineistossa kuvaresurssi ei esiinny näin säännönmukaisessa kohdassa, vaan *visuaalistuksen* jälkeen tulee usein *tulkinta* eikä *lasku*. On myös tapaus, jossa koko *ratkaisun* yksikkö koostuu pelkistä *visuaalistuksista* (LYM e2, s. 78–81). Erityisesti tällaista esimerkkitehtävää ei ole lainkaan O'Halloranin (2005: 190; 2007b: 78; 2008a: 232) aineistoissa.

O’Halloranin (2005: 134; 2007b: 85; 2008a: 232) aineistoissa kuvaresurssia avustetaan vähintään symboliresurssilla ja usein myös luonnollisen kielen resurssilla. Tutkittavassa aineistossa kuvat eivät aina ole itsessään multisemioottisia, eli kuvaresurssia ei välttämättä avusteta millään muulla resurssilla. Esimerkiksi kuvassa 8 oleva *visuaalistus* ei ole multisemioottinen kuva eli piirroskuvassa ei ole muita semioottisia resursseja. Aineiston asiasisältö lienee yhtenä syynä siihen, että kuvaresurssin käyttö eroaa O’Halloranin (mp.) havainnoista. Kun opetetaan lukujonojen perusteita, saatetaan käyttää sellaisia piirroskuvia, jotka muistuttavat arkimaailman representointia.



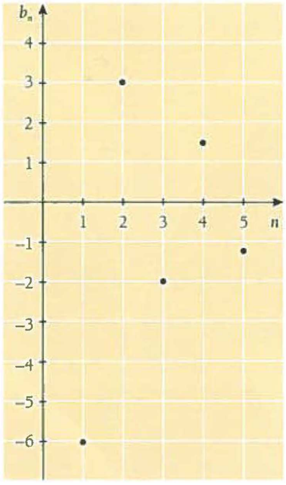
Kuva 8. *Visuaalistuksessa* pelkkää kuvaresurssia.
(OM j, s. 86–87)

Vaikka kuva 8 on lähempänä arkimaailmaa representoivia kuvia kuin tiukan matemaattisia multisemioottisia kuvia, on kuvalla silti matemaattisen kuvan piirteitä: Kuvalla ei ole kontekstia, eli vaikka piirroksesta syntyy mielleyhtymä laatoitukseen, ei kuvaa ole laitettu reaalimaailman kontekstiin piirroksessa itsessään eikä *ongelman perustiedoissa*. Kuvan entiteettejä ei myöskään esitetä reaalimaailman ihmishavaitsijan perspektiivistä.

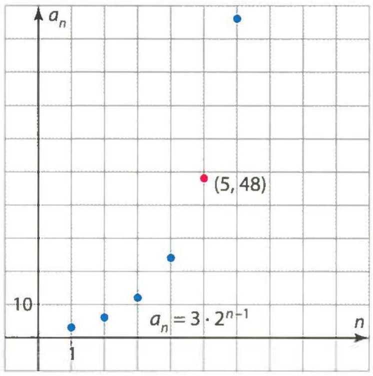
Aineistossa on koordinaatistoja, jotka ovat edellä ollutta kuvaa tyypillisempiä matematiikan kuvia, sillä koordinaatistot ovat multisemioottisia kuvia. *Visuaalistuksia*, joissa on koordinaatisto, on aineistossa viisi. Kuvissa 9 ja 10 (s. 32) on esimerkit aineiston koordinaatistoista. Molemmissa koordinaatistoissa akseleilla on symboliresurssia semioottisena adoptiona.

Ensimmäisessä esimerkissä koordinaatistossa on väripohja, joka yksin ollessaan olisi salientti. Koko aukeaman (ks. s. 78 ja 80) kontekstissa koordinaatisto ei kuitenkaan ole salientein, vaan salientein elementti on vasemman sivun väripohja, sillä sen väri poikkeaa aukeaman muiden elementtien väreistä. Myöskään pelkästään oikealla sivulla koordinaatisto ei ole salientein, sillä sen yläpuolella oleva taulukko on paljon koordinaatistoa suurempi.

Kuvan 10 koordinaatistossa sen sijaan on salientti punainen piste, ja väriä käytetäänkin erottamaan yksi piste muista koordinaatistoon merkityistä pisteistä. Lisäksi piste nimetään symboliresurssin konventioilla, ja kaikille pisteille annetaan symboliresurssin muoto



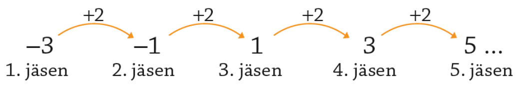
Kuva 9. *Visuaalistuksessa* koordinaatisto, jossa on väripohja.
(LYM e2, s. 78–81)



Kuva 10. *Visuaalistuksessa* koordinaatisto, jossa on värilliset pisteet.
(YT e4, s. 100–101)

eli $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$. Yhdessä kuvassa esitetään siis sama entiteetti kahdella eri resurssilla. Koska tarkoitteen merkitys laajenee eri resursseilla esitettynä, on kuva- ja symboliresursseilla uudelleenkontekstoiva suhde.

Kuvassa 11 (s. 33) on multisemioottinen havainnollistus *visuaalistuksessa*. Havainnollistavassa kuvassa käytetään kaikkia kolmea semioottista resurssia: Kuvassa suurimpana eli tärkeimpänä esitettävät entiteetit annetaan symboliresurssilla. Kuvaresurssia käytetään värillisiin nuoliin, ja nuolille annetaan myös symboliresurssin merkitys. Kuvassa alimpana annetaan luonnollisen kielen nimi jokaiselle symboliresurssilla esitettävälle entiteetille. Kuvassa semioottiset resurssit uudelleenkontekstoivat tarkoitetta, ja kyseessä on intersemioottinen metafora.



Kuva 11. Multisemioottinen *visuaalistus*.

(OM e2, s. 90–91)

Kuudessa aineiston *visuaalistuksessa* on taulukko. Taulukko sinänsä on tekstiä, joka esitetään kuvaresurssilla. Se on ellipsin äärimmäinen muoto, jossa pois jätetyt luonnollisen kielen elementit korvataan spatiaalisella järjestyksellä (Lemke 1998: 8–9[10]). Taulukko ylipäätään tiivistää tietoa niin, että tarvittava tieto on nopeasti silmäiltävissä. Taulukossa on otsikot, joilla nimetään esitettävät entiteetit, ja taulukon sisältö kielellistettynä on kuvaus näiden entiteettien välisistä suhteista, periaatteessa siis useita ekvatiivilauseita. Esimerkiksi kuvan 12 taulukossa yksi lauseista olisi vaikkapa *ensimmäisenä treeniohjelman päivänä kävelylenkin pituus on 150 metriä*. Kaikissa taulukoissa taulukon otsikkorivi erotetaan taulukon sisällöstä isolla alkukirjaimella, väripohjalla ja typografisesti lihavoinnilla, ja moni taulukoista onkin sivullaan salientti.

Kävelylenkkien pituudet ensimmäisen ohjelman mukaan:

Treeniohjelman päivä	**Kävelylenkin pituus**
1. päivä	150 (m)
2. päivä	150 + 50 = 200 (m)
3. päivä	150 + 2 · 50 = 250 (m)
4. päivä	150 + 3 · 50 = 300 (m)
5. päivä	150 + 4 · 50 = 350 (m)
20. päivä	150 + 19 · 50 = 1 100 (m)

Kuva 12. Luonnollista kieltä ja taulukko *visuaalistuksessa*.

(LYM e1, s. 76–77)

Kuvan 12 *visuaalistus* alkaa kuvatekstimäisellä luonnollisen kielen substantiivilausekkeella, joka päättyy kaksoispisteeseen. Lausekkeen päättävällä kaksoispisteellä osoitetaan, että seuraavaksi tuleva täsmentää tai täydentää lauseketta. Käytetty semioottinen resurssi kuitenkin vaihtuu ennen kuin lausekkeesta muodostettaisiin virke. Luonnollisesta kielestä on osan sisäinen makrosiirtymä kuvaresurssiin. Tässä siis sidotaan toisiinsa kaksi eri semioottista resurssia, ja näin luodaan semioottista koheesiota osan sisälle.

10 Sivunumero viittaa pdf-tiedostoon, jossa ei noudateta alkuperäisen julkaisun sivunumerointia.

Kuvan 12 taulukko sisältää sekä luonnollista kieltä että symboliresurssia, jolloin tapahtuu semioottista sekoittumista. Laskutoimituksen lopussa oleva metrin tunnus sulkeissa on laskettavissa luonnollisen kielen semioottiseksi adoptioksi, sillä se ei varsinaisesti kuulu laskutoimitukseen.

Kaikissa aineiston taulukoissa ei välttämättä ole luonnollista kieltä ollenkaan, vaan itse asiassa luonnollista kieltä saattaa taulukon sisältävässä *visuaalistuksessa* olla vain tehtävän alakohdan ilmoittavan kirjaimen verran. Esimerkiksi kuvassa 13 on taulukko, jossa on pelkkää symboliresurssia. Kyseessä on silti semioottinen sekoittuminen, sillä itse taulukko tosiaan on kuvaresurssia.

b)

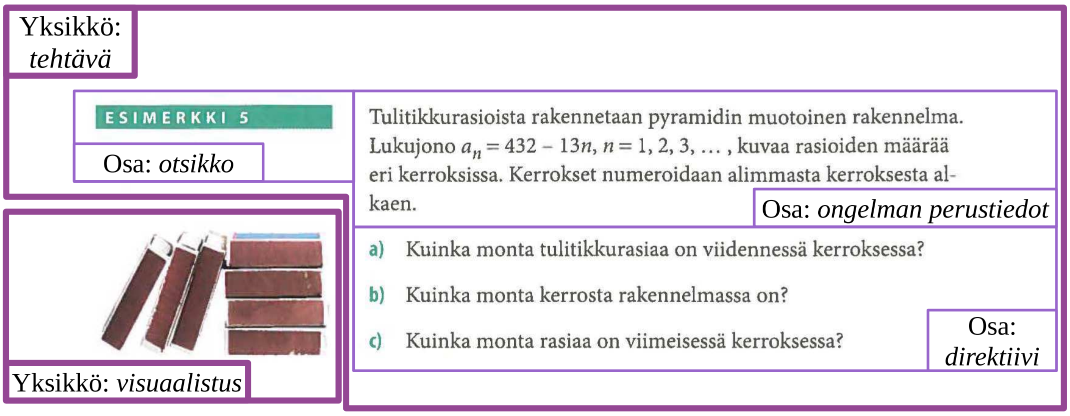
n	b_n
1	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{2}{3}$
3	$\frac{3}{4}$
4	$\frac{4}{4+1}=\frac{4}{5}$
5	$\frac{5}{5+1}=\frac{5}{6}$
n	$\frac{n}{n+1}$

Kuva 13. Taulukossa pelkkää symboliresurssia.

(LYM e3, s. 82–83)

Yksi *visuaalistuksen* tyypeistä on vaakasuuntainen värillinen palkki. Tällainen *visuaalistus* ei ole koko aineistossa yleinen. Palkkia käytetään tekstijaksojen välissä erottamaan eri jaksoja. Kyseessä on siis taitollinen ratkaisu – visuaalinen elementti, jolla on funktio. Määritän palkin osan olevan *ratkaisun* päättävä *visuaalistus*, ja sellaiseksi olen sen liitteen kaavioihin merkinnyt. Vaikka esimerkkitehtävien välissä saattaa olla väripalkkeja sekä tehtävän lopuksi että ennen seuraavaa tehtävää (ks. kuvat 7 ja 8 s. 88 ja 90), ei lukujen alussa otsikkoa eroteta ensimmäisestä esimerkistä väripalkilla, eli palkki ei kuulu jakson alkuun.

Yksi *visuaalistus* eli valokuva sijaitsee *tehtävän* ja *ratkaisun* yksikköjen ulkopuolella. Valokuva tehtäväkonteksteineen on kaaviossa 5. Koska kuvalla ei ole kyseisessä esi-



Kaavio 5. Erillinen *visuaalistuksen* yksikkö *tehtävän* yksikön rinnalla.
(YT e5, s. 104–105)

merkkitehtävässä funktiota *tehtävän* yksikön asiasisällön kannalta, en määritä, että se sijaitsisi *tehtävän* yksikössä, vaan tulkitsen sen olevan yksikön ulkopuolinen elementti vastaavalla tavalla kuin luvussa 3.1.7 käsiteltävät *selitys* ja *ohje* ovat. Tulkintaa puoltaa kuvan sijoittaminen marginaaliin eli erilleen itse tehtävänannosta. Kuvassa olevat tulitikkuaskit kyllä liittyvät tehtävässä annettavaan kontekstiin, mutta kuvan funktiona on lähinnä sivun elävöittäminen – eli lukijan viihdyttäminen – ja huomion kiinnittäminen, sillä valokuva on sivulla hyvin salientti.

3.1.6 *Tulkinta*

Tulkinnan osassa selitetään, päätellään tai tulkitaan tehtävänantoa, *laskua* tai *visuaalistusta*. *Tulkintoja* on yhteensä 38 kappaletta. Vain yksi esimerkkitehtävä ei sisällä *tulkintaa* lainkaan (LYM e2, s. 78–81), ja tehtävän *ratkaisu* koostuu pelkistä *visuaalistuksista*. Toisaalta aineistossa on yksi esimerkkitehtävä (OM e1, s. 88–89), jonka *ratkaisu* ei sisällä mitään muita osia kuin *tulkintoja*.

Kuten aiemmin on tullut esille, O'Halloran (2007b: 87–88; 2008a: 239–240) ei nimeä tehtävän ratkaisusta vastaavaa komponenttia lainkaan, sillä hän nimeää erikseen vain kuvaresurssin elementtejä. O'Halloran (2015a: 71) kuitenkin kuvaa, että luonnollista kieltä käytetään sekä matemaattisten päättelyjen että tulosten perusteluun ja tulkintaan. Tämä havainto täsmää niihin havaintoihin, joita tämän tutkimuksen aineistosta voi tehdä, sillä *tulkinnan* pääasiallisena semioottisena resurssina on luonnollinen kieli, johon upotetaan symboliresurssia semioottisena adoptiona tai semioottisena sekoittumisena.

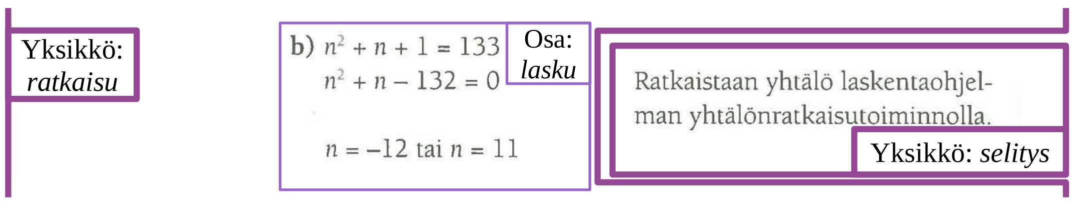
Usein *tulkinnan* osissa eksplikoidaan, mitä seuraavaksi tehdään. Matematiikan kirjallisen kielentämisen malleista tehtävät siis usein muistuttavat kertomusmallia eli mallia, jossa sanallisesti tai kuvioilla kuvataan vaiheittain, miten ratkaisu etenee ja mihin se perustuu (Joutsenlahti 2009: 7[11]). Joutsenlahden (mas. 7–8) mukaan lukion matematiikan oppimateriaaleissa esimerkkitehtävien ratkaisuissa hyödynnetään usein kertomusmallia, minkä voi huomata myös siitä, miten yleinen *tulkinnan* osa aineistossa tosiaan on.

3.1.7 *Selitys* ja *ohje*

Muita valinnaisia yksikköjä ovat erilaiset ratkaisun sisältöön tai ratkaisuprosessiin liittyvät *selitykset* ja *ohjeet*. *Selityksessä* käytettävä semioottinen pääresurssi on yleisimmin luonnollinen kieli, johon toisinaan upotetaan semioottisena adoptiona symboliresurssia, mutta *selitys* voi olla pelkkää symboliresurssiakin. *Ohjeet* puolestaan ovat pelkkää luonnollista kieltä. *Selityksen* ja *ohjeen* yksiköt eivät sisältönsä takia kuulu *ratkaisun* yksikköön, vaikka ne saattavatkin sijaita *ratkaisun* yksikön rinnalla. Molemmat yksiköt ovat siis ylimääräisiä ratkaisuprosessin sisällöstä riippumattomia ja ratkaisuprosessiin kuulumattomia elementtejä.

O'Halloranin (2005: 190; 2007b: 78; 2008a: 232) aineistoista havaitsen, että kahdessa paikassa (2005: 190; 2007b: 78) on funktioltaan *selitystä* vastaava elementti, joka on sulkeissa ja erotettu muusta tekstistä spatiaalisesti. Analyysissään O'Halloran (2005: 189–199; 2007b) ei kuitenkaan huomioi näitä elementtejä lainkaan.

Selitys erotetaan muusta tekstistä vähintään spatiaalisesti (kaavio 6), mutta tämän tutkimuksen aineistossa tavallisemmin vielä erottuvammin eli käyttämällä lisäksi värillistä tekstiä (kuva 14), värillistä kehystä (kuva 15) tai väripohjaa (kuva 16).



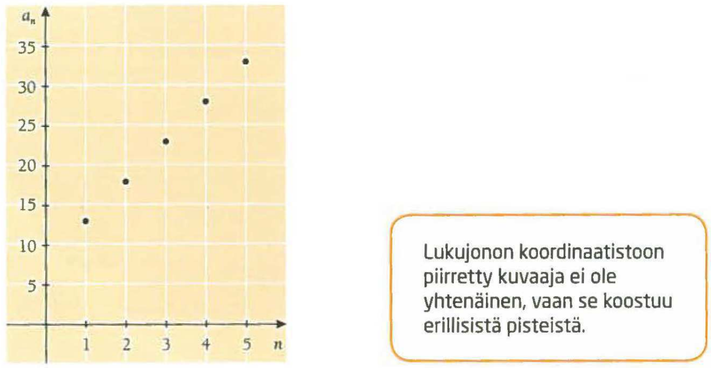
Kaavio 6. Spatiaalisesti erotettu *selitys*.

(LYM e4, s. 84–85)

11 Sivunumero viittaa pdf-tiedostoon, jossa ei noudateta alkuperäisen julkaisun sivunumerointia.

$$a_{60} = 2 \cdot 60 - 5 \qquad a_n = 2n - 5$$
$$= 120 - 5$$
$$= 115$$

Kuva 14. Spatiaalisesti ja värillä erotettu *selitys*, jossa on pelkkää symboliresurssia. (YT e2, s. 96–97)



Kuva 15. Spatiaalisesti ja värikehyksellä erotettu *selitys*.

(LYM e2, s. 78–79)

ensimmäinen jäsen	$\frac{3}{4}$
toinen jäsen	$\frac{3}{4} - {}^{2)}\,\frac{1}{2} = \frac{3}{4} - \frac{2}{4} = \frac{1}{4}$
kolmas jäsen	$\frac{1}{4} - \frac{2}{4} = -\frac{1}{4}$
neljäs jäsen	$-\frac{1}{4} - \frac{2}{4} = -\frac{3}{4}$
viides jäsen	$-\frac{3}{4} - \frac{2}{4} = -\frac{5}{4}$

! Toista jäsentä laskettaessa huomattiin, että $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$. Lukujonon jäsen voidaan siis laskea vähentämällä edellisestä jäsenestä luku $\frac{2}{4}$.

Kuva 16. Väripohjalla erotettu *selitys*.

(OM e3, s. 92–93)

Kuten edellisistä kuvista ja kaaviosta voidaan havaita, on *selitysten* pääasiallinen semioottinen resurssi yleensä luonnollinen kieli, jota avustetaan symboliresurssilla semioottisena adoptiona. Aineistossa on kuitenkin sellaisia *selityksiä*, joissa on pelkkää symboliresurssia, mikä nähdään esimerkiksi kuvassa 14. *Selitysten* funktio lähestyy matematiikan kielentämistä. Niillä siis kuvataan, selitetään ja kommentoidaan, miten matemaattinen ajatteluprosessi etenee, kun ratkaisu edistyy. Matematiikan kirjallisen kielentämisen malleista tämä muistuttaa kommenttimallia, eli mallia, jossa selitetään ja perustellaan ratkaisun etenemistä ja kuvataan, mitä ratkaisussa tapahtuu (Joutsenlahti 2010: 12–13; Joutsenlahti – Tossavainen 2018: 419–421). Joutsenlahti (2010: 13) huomioi, että opettajat käyttävät taulutyöskentelyssään kommenttimallia, ja Joutsenlahden ja Tossavaisen (2018: 421) mukaan malli sopii hyvin uusien asioiden esittelyyn.

Esittelin kuvassa 16 väripohjalla erotetun *selityksen*. Koko värialue alkaa tekstistä spatiaalisesti erotetulla logolla, eli luonnollisen kielen resurssia käyttävään yksikköön on upotettu kuvaresurssia. Huutomerkistä muodostetun logon merkitystä ei selitetä teoksen alussa sivulla 4 kohdassa, jossa annetaan teoksen kahdelle muulle logolle merkitys. *Kielitoimiston oikeinkirjoitusoppaan* (s. 63) mukaan luonnollisessa kielessä huutomerkkiin päätetään virkkeet, joissa on huudahdus tai painokas käsky, mutta huutomerkkiä käytetään toisinaan myös tekstin keskellä sulkeissa, kun halutaan lukijan kiinnittävän johonkin erityistä huomiota. Logo onkin lähinnä visuaalistettu sulkeisiin sijoitettu huutomerkki, eli sen funktiona on kiinnittää huomio – ikään kuin tuplavarmistaa väripohjan salienssi.

Ohjeen yksiköitä on kaksi, ja ne molemmat sijaitsevat samassa tehtävässä (YT e 4, s. 100–103). *Ohje* erotetaan muusta tekstistä ensinnäkin vaalealla väripohjalla ja toiseksi spatiaalisella sijoittelulla eli *ohje* on sivun vasemmassa marginaalissa.

3.1.8 *Vastaus*

Vastauksen osassa käytetään semioottisena resurssina joko pelkkää symboliresurssia tai luonnollista kieltä, johon todennäköisesti upotetaan symboliresurssia joko semioottisena adoptiona tai semioottisena sekoittumisena. Lisäksi *vastauksessa* toki toistetaan tehtävän alakohtien luonnollisen kielen typografisesti korostettu luettelo, jos tehtävässä on alakohdat.

Kun tehtävän vastauksena on kuvaresurssin entiteetti, ei kuvaa toisteta *vastauksessa*. Tällöin kuva on *ratkaisun* yksikössä eikä sitä toisteta *ratkaisun* yksikön päätyttyä. Jos tehtävän kaikkien alakohtien vastaukset ovat kuvaresurssin entiteettejä, ei koko *vastauksen* yksikköä ole lainkaan.

O'Halloranin (2005: 190; 2007b: 78; 2008a: 232) tutkimusten aineistoissa ei ole erillisiä vastauksia tehtävän ratkaisun lopuksi, eli hänen aineistoissaan pedagoginen linjaus on vastaava kuin *Otavan matematiikassa*, jossa ei ole erillisiä *vastauksia* lainkaan.

3.2 Tarkoitteiden merkitykset intersemioottisessa tekstissä

Edellisissä luvuissa tarkoitteiden merkitysten laajenemista ja intersemioottisia metaforia nähtiin osien sisällä. Huomioin muutamassa kohdassa, että semioottisilla resursseilla oli uudelleenkontekstoiva suhde. Kun siis tarkoite esitettiin uudella semioottisella resurssilla eli asetettiin uuteen kontekstiin, eri resursseilla esitettävät semanttiset merkitykset erosivat merkittävästi toisistaan. Kuten luvussa 2.5 tuli ilmi, määrittelee Lim (2004: 239) myös toisenlaisen kontekstoinnin suhteen eli yhteiskontekstoinnin. Yhteiskontekstoivassa suhteessa merkitykset heijastavat tai lähestyvät toisiaan. Edellä mainitussa luvussa mainitsin myös, että kontekstoinnin täsmällisen suhteen määrittäminen ei tunnu sopivan aineistoon. Luonkin seuraavaksi silmäyksen siihen, millaisia kontekstoinnin tyyppejä aineistosta voi tai ei voi erottaa. Sen jälkeen tarkastelen tarkoitteiden merkitysten laajenemisia osarajojen yli, jolloin tarkastelen toisin sanoen myös intersemioottisia metaforia.

Yhteiskontekstoivia suhteita aineistossa on selvästi oikeastaan vain yhdessä esimerkkitehtävässä (LYM e1, s. 76–77). Kyseisessä esimerkissä on ensin *metri* luonnollisessa kielessä *tehtävän* yksikössä. Metrin yksikkö toistetaan myöhemmin taulukossa eli kuvaresurssissa, jossa se merkitään sulkeisiin. Koska merkitys ei muutu tai laajene, on semioottisten resurssien suhde yhteiskontekstoiva, mikä luo semioottista koheesiota.

Aineistossa on toinen esimerkkitehtävä (YT e5, s. 104–105), jossa kahden semioottisen resurssin suhteen voi hahmottaa yhteiskontekstoivaksi. Tehtävässä on valokuva, jossa on tulitikkurasioita, ja esimerkkitehtävän luonnollisen kielen osissa esiintyy myös *tulitikkurasia*. Yhteiskontekstoivassa suhteessa tarkoitteiden ei tosiaan tarvitse olla tismalleen samoja, vaan riittää, että tarkoitteiden merkitykset muistuttavat toisiaan. Vaikka siis valokuvassa eivät ole tismalleen tehtävässä kuvatut pyramidin muodossa olevat sadat *tulitikkurasiat*, tarkoitteiden merkitykset eivät ole kovin ristiriitaisia tai epäodotuksenmukaisia.

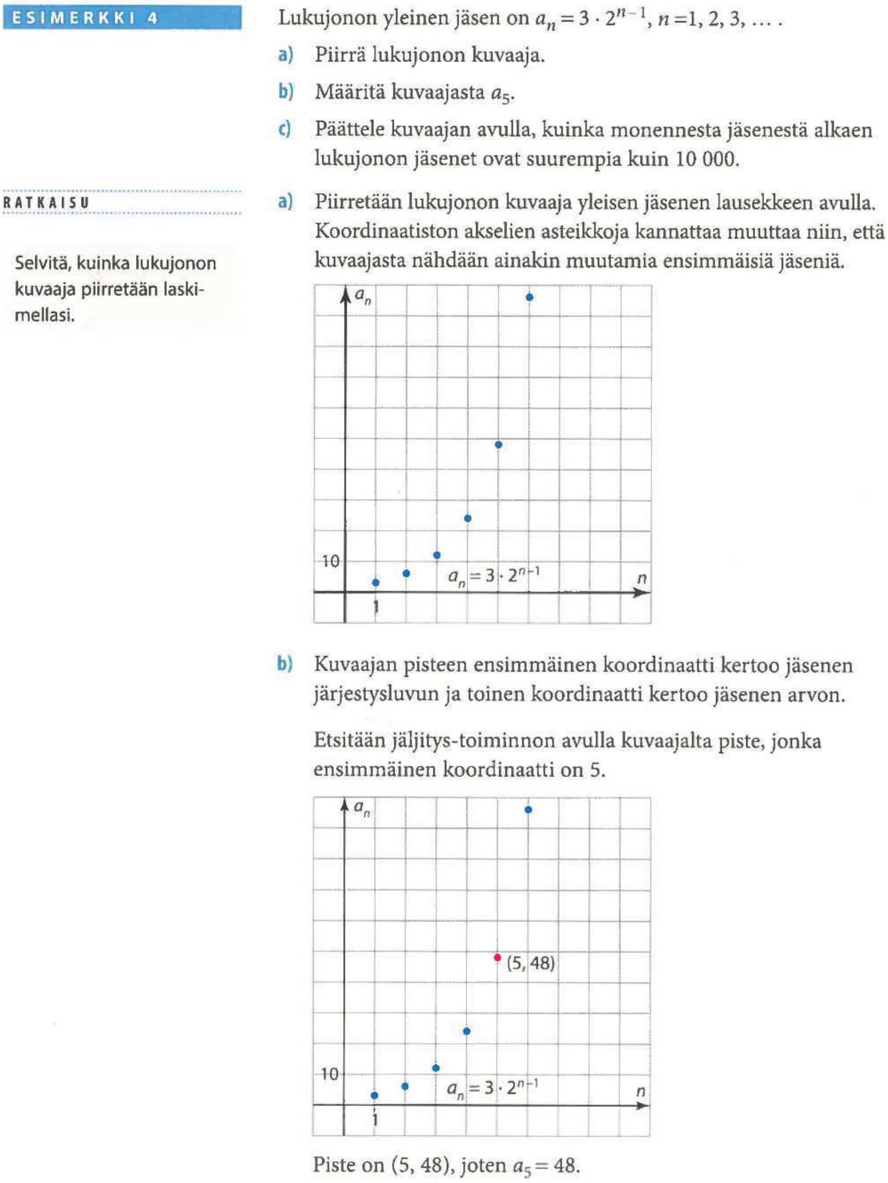
Aineistossa muiden kohtien tulkitseminen yksiselitteisesti joko yhteis- tai uudelleenkontekstoiviksi suhteiksi vaatisi mielestäni liikaa tulkintaa siitä, mikä on lukijan mielestä odotuksenmukaista ja mikä ei. Edellä käsitellyt tehtävät ovat aineiston ainoat tehtävät, joissa luonnollisessa kielessä esiintyvät entiteetit ovat reaalimaailman entiteettejä, sillä reaalimaailmaan sijoitetaan vain kaksi edellä esillä ollutta kontekstitehtävää. Muissa tehtävissä konteksti on abstrakti, joten suurin osa tehtävissä esiintyvistä tarkoitteista on abstrakteja matemaattisia entiteettejä, ja niihin viitataan symboliresurssilla ja kuvaresurssilla. Mikä sitten olisi lukijan mielestä odotuksenmukainen semanttinen merkitys, kun abstrakti entiteetti esitetään eri resursseilla? Tämä siis vaatisi tulkintaa siitä, millaisia tiedollisia odotuksia lukijalla on matematiikan tekstistä. Mielestäni on toisarvoista ryhtyä spekuloimaan, millainen matemaattinen intuitio lukijalla kenties on, ja tärkeintä on, että tarkoitteiden merkitykset laajenevat, kun ne esitetään uudella semioottisella resurssilla. Tästä näemme esimerkin seuraavaksi.

Tarkastelen nyt siis esimerkkitehtävää osarajojen yli. Näin saadaan aiempaa ehjempi ja laajempi kuva siitä, miten tekstissä käytetään semioottisia resursseja abstraktien entiteettien kuvaamiseen ja miten tarkoitteiden merkitykset laajenevat, kun niihin viitataan eri semioottisilla resursseilla. Tästä hyvä esimerkki on kuvassa 17 (s. 41). Erittelen seuraavaksi, miten tekstissä laajennetaan tarkoitteiden merkityksiä eri semioottisilla resursseilla tehtävänannon ja ratkaisun alakohdissa a ja b. En siis käsittele erikseen tehtävän alakohtaa c tai muita esimerkkitehtäviä, sillä sekä viimeisessä alakohdassa että muissa esimerkkitehtävissä havaittavat ilmiöt ovat toisteisia niille ilmiöille, joita kahdesta ensimmäisestä alakohdasta nähdään. Seuraavaksi siis seuraan tarkoitteiden merkityksiä enkä edellisten lukujen tapaan enää erittele esimerkissä havaittavia muita intersemioottisia ilmiöitä.

Esimerkin alussa lähdetään liikkeelle siitä, että on olemassa *lukujonon yleinen jäsen*, ja sille annetaan heti symboliresurssin muoto. Symboliresurssin muoto sisältää ensin merkinnän a_n. Merkintä samastetaan heti lausekkeeseen $3 \cdot 2^{n-1}$ ja sen perään annetaan vielä rajoite, jossa annetaan ensin entiteetti *n*, ja määritellään sitten, että se voi olla vain yhtä suurempia kokonaislukuja. On siis olemassa yksi entiteetti, joka on kuvattu ensin luonnollisella kielellä ja sitten symboliresurssilla kahdella eri tavalla. Lisäksi tämä entiteetti sisältää toisen entiteetin, jolle puolestaan on annettu rajoitteita. Kaikki tämä on tehty yhdellä virkkeellä.

Sitten siirrytään tehtävänannon a- ja b-alakohtiin. Siellä uutena entiteettinä tuodaan *lukujonon kuvaaja*. Nyt on siis olemassa sekä *lukujonon yleinen jäsen* että *lukujonon kuvaaja*, ja itse *lukujono* jätetään yhä erikseen esittelemättä. Seuraavassa alakohdassa esiintyy taas *kuvaaja*, ja nyt implikoidaan, että *kuvaaja* sisältää jonkin uuden entiteetin eli symbolimerkinnän entiteetin a_5. Nyt lukijan pitää osata päätellä, miten uusi entiteetti a_5 liittyy jo esillä olleisiin entiteetteihin.

A-kohdan ratkaisun alussa on edellä esitelty *lukujonon kuvaaja*. Sitä seuraa *yleisen jäsenen lauseke*, jossa substantiivilausekkeessa on tuttua asiaa. Substantiivilausekkeesta on elliptisesti jätetty pois *lukujono* ja jäljellä on vain *yleinen jäsen*. Uusi asia on siis *lauseke*, joka on symboliresurssin merkinnän nominaalistus ja siten laajentaa olemassa olevan tarkoitteen merkitystä. Virkkeessä sanotaan, että jotakin *piirretään* jonkin *avulla*, mutta jätetään lukijan pääteltäväksi – ja selvitettäväksi (*Selvitä, kuinka lukujonon kuvaaja piirretään*



ESIMERKKI 4

Lukujonon yleinen jäsen on $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$.

a) Piirrä lukujonon kuvaaja.

b) Määritä kuvaajasta a_5.

c) Päättele kuvaajan avulla, kuinka monennesta jäsenestä alkaen lukujonon jäsenet ovat suurempia kuin 10 000.

RATKAISU

Selvitä, kuinka lukujonon kuvaaja piirretään laskimellasi.

a) Piirretään lukujonon kuvaaja yleisen jäsenen lausekkeen avulla. Koordinaatiston akselien asteikkoja kannattaa muuttaa niin, että kuvaajasta nähdään ainakin muutamia ensimmäisiä jäseniä.

b) Kuvaajan pisteen ensimmäinen koordinaatti kertoo jäsenen järjestysluvun ja toinen koordinaatti kertoo jäsenen arvon.

Etsitään jäljitys-toiminnon avulla kuvaajalta piste, jonka ensimmäinen koordinaatti on 5.

Piste on (5, 48), joten $a_5 = 48$.

Kuva 17. Esimerkkitehtävä, jossa on käytössä kolme semioottista resurssia. (YT e4, s. 100–101)

laskimellasi.) –, millaisin teoin piirros tosiasiassa syntyy. *Lausekkeen avulla* piirtäminen ei vertaudu reaalimaailman konteksteihin, joissa voitaisiin vaikkapa *piirtää harpin avulla millimetripaperille ympyrä, jonka halkaisija on 1 senttimetri*.

Seuraavassa virkkeessä tulee annettuna taas uusi entiteetti, *koordinaatiston akselien asteikko*. Oletetaan siis, että lukijalle ovat tuttuja *koordinaatisto, koordinaatiston akselit* ja *koordinaatiston akselien asteikot* sekä se, että asteikkoja on mahdollista *muuttaa*. Sitten esiintyy taas *kuvaaja*, josta tällä kertaa *nähdään ainakin muutamia ensimmäisiä jäseniä*.

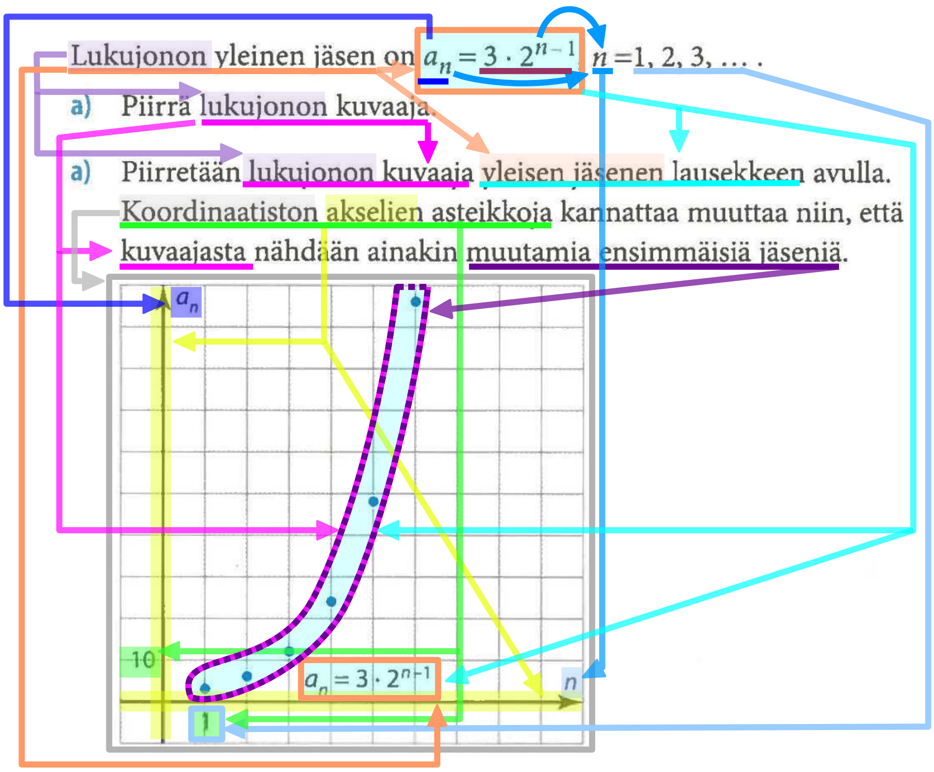
Jäsenestä on elliptisesti jätetty pois *lukujono*, ja uutena entiteettinä on *muutama ensimmäinen jäsen*.

Semioottinen resurssi vaihtuu kuvaresurssiksi, ja aiemmin esiteltyjen tarkoitteiden merkitykset laajenevat entisestään. Ensinnäkin kuvassa on nyt se *koordinaatisto*, joka oletettiin tutuksi. Siinä on *akselit* ja *akselien asteikot*. Akselien järjestys on sama kuin esimerkkiä edeltäneessä teoriassa. Sivuhuomautuksena sanottakoon, että aineiston esimerkeissä akselien järjestys saattaa ilmestyä piirrokseen niin, ettei lukija voi tietää mitenkään, miksi akselit ovat juuri näin päin (LYM e2, s. 78–79). Palataan kuitenkin takaisin tähän esimerkkiin. Koordinaatiston akseleilla esiintyvät edellä olleet tarkoitteet n ja a_n, eli niiden merkitykset laajenevat. Lisäksi akseleilla on luku 1, jonka voi tulkita esiintyneen heti tehtävänannon alussa, mutta pystyakselin luku 10 ei ole esiintynyt aiemmin. Luvut kuitenkin liittyvät *akselien asteikkoihin*. Koordinaatistoon on vielä upotettu symboliresurssin entiteetti, jota tehtävänannossa nimitettiin *lausekkeeksi*. Nyt entiteetillä nimetään kuvaresurssin entiteetti eli laajennetaan taas tarkoitteen merkitystä niin, että nyt tarkoite saa sinisten pallukoiden muodostaman kokonaisuuden hahmon. Samalla siniset pallukat ovat sekä *lukujonon kuvaaja* että *muutama ensimmäinen jäsen*.

Kaavioon 7 (s. 43) on merkitty a-kohdan tehtävänannon ja ratkaisun tarkoitteet ja se, miten tarkoitteiden merkitykset liikkuvat tekstin edetessä. O'Halloranin (2005: 122, 162) mukaan matemaattisen tekstin lukureitti on rekursiivinen, joten kaavion nuolten olisi kenties syytä olla kaksisuuntaisia. Tässä jätin nuolet kuitenkin yksisuuntaisiksi jo pelkästään siksi, että joihinkin kohtiin olisi hankalaa sovittaa tekstin lomaan kahta nuolen kärkeä.

B-kohdan ratkaisu alkaa pitkällä substantiivilausekkeella *kuvaajan pisteen ensimmäinen koordinaatti*, jossa tuttua on vain *kuvaaja*. Lukijalle tutuiksi oletetaan käsitteet *piste* ja *koordinaatti* – sekä tietysti se, mitä tarkoittaa nimenomaan *ensimmäinen koordinaatti*. Kuvaresurssin kaikki siniset pallukat nimetään nyt *kuvaajan pisteiksi* eli taas merkitykset laajenevat. Tietyllä tavalla tässä siis eksplikoidaan, että entiteetti muodostuu tosiaan yksittäisistä *pisteistä*, vaikka kuvaresurssissa siihen viitataan yhtenä kokonaisuutena, kun se nimetään kuvaresurssiin upotetulla symboliresurssilla $\left(a_n = 3 \cdot 2^{n-1}\right)$. Seuraavaksi tekstiin tuodaan uudet tarkoitteet *jäsenen järjestysluku* ja *jäsenen arvo*. *Jäsen* on ollut, mutta kyseessä ovat (*lukujonon*) *jäseneen* liittyvät uudet entiteetit.

Seuraavassa tekstikappaleessa ilmestyy lukijalle tutuksi oletettu *jäljitys-toiminto*, millä viitataan tekstin ulkopuolella esiintyvään asiaan eli laskimen tai laskinohjelmiston ominaisuuksiin ja toimintatapoihin. Sitten tulee jotakin tuttua eli *kuvaaja* ja *piste*. *Kuvaa-*



Kaavio 7. Tarkoitteiden merkitysten laajentuminen, kun käytössä on kolme semioottista resurssia.

(YT e4, s. 100–101)

jan merkitys pysyy tällä kertaa samana. *Pisteen* ominaisuuksia rajoitetaan restriktiivisellä relatiivilauseella, eli enää ei puhuta yleisesti mistä tahansa *pisteestä* vaan huomio kohdistetaan tiettyyn *pisteeseen*. Aiemmin esillä olleesta *kuvaajan* entiteetistä, joka koostuu kaikkien *pisteiden* joukosta, poimitaan uudeksi entiteetiksi yksi yksittäinen *piste*. Tähän mennessä ratkaisun tästä *tulkinnan* osasta on loistanut poissaolollaan itse tehtävänannossa mainittu entiteetti a_5. Kun siis virke päätetään lukuun 5, pitää lukijan ymmärtää, mistä ja miksi kyseinen numero ilmestyy tekstiin. Lukijan pitää yhdistää tiedot a_n:stä, a_5:stä, *kuvaajasta*, *kuvaajan pisteistä* ja *pisteiden koordinaateista*.

B-kohdan koordinaatisto on lähes identtinen a-kohdan koordinaatiston kanssa. Yhden pisteen väri on kuitenkin vaihdettu ja se nimetään pisteeksi (*5*, *48*). Merkitykset laajenevat taas: kuvaresurssin entiteetti eli punainen pallukka on sama entiteetti kuin symboliresurssin a_5, siis sama kuin symboliresurssin (*5*, *48*) ja edelleen sama kuin restriktiivisellä relatiivilauseella kaikista *pisteistä* poimittu yksi *piste*.

B-kohdan ratkaisu päätetään vielä virkkeeseen, jossa kootaan, mitä tehtävässä on saatu selville. Annettuna on *piste* eli se, mihin edellisessä luonnollisen kielen ilmauksessa jäätiin. Se samastetaan symboliresurssin ilmaukseen (*5, 48*), joka annettiin ensimmäistä kertaa kuvaresurssin sisällä. Tästä päätellään, että tehtävänannossa edellisen kerran esiintynyt a_5 on 48. Se on siis sama kuin nimetty osa, *toinen koordinaatti*, symboliresurssin (*5, 48*):stä.

Tarkoitteiden merkitykset laajenevat siis koko ajan, kun niihin viitataan eri semioottisilla resursseilla. Teksti on näin muodoin täynnä intersemioottisia metaforia. Kaaviossa 7 nähtiin, miten entiteetteihin viitataan a-kohdassa. Jos kaavioon otettaisiin b-kohtakin mukaan, lisääntyisivät nuolet niin paljon, että kaaviosta tulisi melko vaikeaselkoinen. Toisin sanoen jos tekstin implisiittiset viittaussuhteet ja tarkoitteiden kulku tehtäisiin eksplisiittisiksi, nähtäisiin, millainen viidakko itse asiassa on kyseessä. Jotta lukija ymmärtäisi tekstin, täytyy hänen tajuta kaikki viittaukset ja oivaltaa, miten tarkoitteiden merkitykset laajenevat tekstin edetessä.

Käsitellyssä esimerkkitehtävässä käytössä on kaikki kolme matemaattisen tekstin semioottista resurssia, mutta aineistossa on havaittavissa aivan vastaavia ilmiöitä myös niissä tehtävissä, joissa on luonnollisen kielen lisäksi käytössä vain symboliresurssi. Toki intersemioottiset metaforat ovat laajimmillaan silloin, kun käytössä on myös kuvaresurssi.

4 Esimerkkitehtävien funktionaalinen rakentuminen

Luvussa 2.5 esittelin metafunktiot pääpiirteisesti. Kuten siellä jo mainitsin, tässä tutkimuksessa ei ole järkevää erottaa ideationaalisesta metafunktiosta erikseen tarkasteltavaksi eksperientiaalista ja loogista metafunktiota, sillä luvussa 3 tarkasteltiin monia ilmiöitä, jotka kuuluvat ideationaaliseen metafunktioon. Käsittelenkin ideationaaliseen metafunktioon liittyviä asioita ensin. Toisessa alaluvussa puolestaan tarkastelen interpersoonaisesta metafunktiosta erityisesti lukijan osallistujaroolia ja kontaktin ottamista lukijaan sekä modaalisuutta. Viimeisessä alaluvussa pohdin informaationkulun hahmottamista multisemioottisesta tekstistä sekä aineiston koheesiokeinoja. Viimeisen alaluvun aiheet kuuluvat siis tekstuaalisen metafunktion alaan.

4.1 Ideationaalinen metafunktio

Kun tekstiä tarkastellaan ideationaalisen metafunktion kannalta, luonnollisesta kielestä voidaan tarkastella esimerkiksi sanastoa ja sanojen välisiä järjestäytyneitä merkityssuhteita, lauseissa olevia prosessityyppejä, referointia ja lauseiden välisiä suhteita (Shore 2012: 163–176). O'Halloran (2005: 168) puolestaan esittää, että multisemioottisissa teksteissä ideationaalista metafunktiota voidaan pohtia käsittelemällä esimerkiksi intersemioottista käsityksenmuodostusta, intersemioottisia vastaavuuksia, ja intersemioottisia metaforia sekä sitä, miten tekstin ja muiden elementtien asettelua ja ulkoasua käytetään suhteiden luomiseen.

Intersemioottisia metaforia esiteltiin luvussa 3. Kuten erityisesti luvussa 3.2 havaittiin, tarkoitteiden merkitykset laajenevat, kun aineistossa viitataan entiteetteihin eri semioottisilla resursseilla. Jotta lukija ymmärtäisi tekstin, pitää lukijan ensinnäkin matematiikan hierarkkisen luonteen takia muistaa paljon asioita, joiden oletetaan olevan tuttuja. Toiseksi lukijan pitää tekstin edetessä käsittää, mitkä kaikki ilmaukset viittaavat samaan tarkoitteeseen ja miten entiteetin hahmo laajenee.

Se, että tekstissä ei ole pelkkää luonnollista kieltä, vaikuttaa myös tekstin prosessityyppeihin. Luvussa 3.1.2 tuli lyhyesti esille tapaus, jossa luonnollisen kielen lauseytimenä on yhtäläisyysmerkki. Seuraavissa esimerkeissä on tästä ilmiöstä sekä kyseinen aiempi tapaus että toinen esimerkki. Koska symbolimerkkiin ei tässä yhteydessä saa lihavointia, on huomion kohteena oleva aines korostettu sinivihreällä värillä.

3) Määritä lukujonon viisi ensimmäistä jäsentä ja 19. jäsen, kun
a) $a_n = 5n + 8$
b) $b_n = \dfrac{6 \cdot (-1)^n}{n}$.

(LYM e2, s. 78–79)

4) Luku 46 on jonon jäsen, jos löytyy sellainen positiivinen kokonaisluku n, jolla $a_n = 46$.

(YT e2, s. 96–97)

Predikaattina toimiva symbolimerkki tarkoittaa yhtäläisyyttä tai yhtäsuuruutta, ja se sijoitetaan symboliresurssissa kahden symbolimerkinnän väliin merkitsemään sitä, että entiteettien arvot ovat yhtä suuria, tai sitä, että tarkoitteena on sama entiteetti. Luonnollisen kielen kielennyksiä symbolille ovat esimerkiksi ’on yhtä suuri kuin’ tai ’on yhtä kuin’.

Luonnolliselle kielelle kielennettynä ilmausta voi siis ajatella esimerkiksi vertailuilmaukseksi tai ekvatiivilauseeksi. Tosin jos yhtäläisyysmerkin ajattelee olevan ekvatiivilause, törmää heti ongelmaan. Ekvatiivilauseella ilmaistaan tarkoitteiden samuutta, ja Kelomäen (1997: 71, 93) mukaan samatarkoitteisuuteen ei voi käskeä, minkä voi tulkita ristiriidaksi esimerkissä 5 olevan käskyn kanssa.

5) **Olkoon** lukujonon yleinen jäsen $a_n = 18n + 23,\ n = 1,\ 2,\ 3,\ \dots$.
(YT e3, s. 98–99)

Esimerkin tapaus on muutenkin luonnollisen kielen ja reaalimaailman kannalta erikoinen, sillä siinä konstruoidaan entiteetin olemassaolo jussiivilla, mutta siihen palaan hieman myöhemmin. Jos taas ilmaukset ajattelee vertailuilmauksiksi, syntyy siitäkin ongelmia. Kun Kelomäki (mts. 132–135) kuvaa vertailurakenteita, hän toteaa, että niillä on totuusarvon lisäksi tempus. O’Halloran (2005: 115) puolestaan huomioi, että symbolimerkinnöillä ei ole tempusta.

Reku (2004: 79–81) mainitsee lyhyesti, että on havainnut aineistossaan lauseita, joissa lauseytimenä on symbolimerkki, muttei analysoi niitä tarkemmin. Lehtonen (2018: 144) taas rinnastaa yhtäsuuruusmerkin suhdetta konstruoiviin verbeihin vedoten ikään kuin käänteisesti siihen, että Shore (2012: 165) puolestaan on verrannut suhdelauseiden prosesseja symbolisiin suhteisiin. Symboleja luonnollisen kielen vastineena käyttävät muutkin, ja vastaavalla tavalla esimerkiksi Kelomäki (1997: 57) antaa ekvatiivilauseen merkitykseksi ’=’, vaikka toisaalla päätteleekin, etteivät looginen notaatio ja luonnollinen kieli noudata aivan samaa logiikkaa (mts. 103).

Yhtäläisyysmerkin ja muiden symbolien käyttäminen luonnollisen kielen ilmiöiden kuvaamiseen vaikuttaa joko periytyvän lähinnä formaalista lingvistiikasta ja logisistisesta semantiikasta, joissa luonnollisen kielen ilmiöitä on pyritty kuvaamaan loogisilla operaattoreilla (ks. esim. Kelomäen (1997: 100–112) kuvaus ekvatiivilauseen formaalista hahmottamisesta). – Tai sitten syynä voi olla, että kielitieteilijöillä on intuitiivinen ymmärrys matematiikan symbolin merkityksestä, mutta luonnollisen kielen ja symbolin vertaamista tai samastamista ei ehkä kuitenkaan ole harkittu täysin loppuun asti niin, että olisi otettu huomioon, että kyse on kahdesta eri merkkijärjestelmästä ja kahdesta eri semioottisesta resurssista.

Täytyy siis pitää mielessä, että kyseessä on nimenomaan kaksi eri semioottista resurssia. Niinpä symbolimerkkien täysi samastaminen yksittäisiin luonnollisen kielen ilmauksiin saattaa olla ongelmallista, vaikka merkeillä olisikin yleisesti hyväksyttyjä ja käytettyjä kielennyksiä. Lemken (1998: 17[12]) mielestä eri semioottiset resurssit eivät vastaa toisiaan vaan ovat vertailukelvottomia tai yhteismitattomia (*incommensurable*), eli yhdellä semioottisella resurssilla ilmaistua asiaa ei voi ilmaista toisella semioottisella resurssilla niin, että merkitys säilyisi täysin samana. Vastaavasti O'Halloran (2005: 97) esittää, että matematiikan symboliresurssin kielentämisessä voi olla samanlaisia ongelmia kuin muiden semioottisten resurssien – kuten maalausten tai veistosten – kielentämisessä; merkitys muuttuu, kun resurssi vaihtuu. Lauseet, joissa predikaattina on symbolimerkki, eroavat luonnollisen kielen vastineistaan erityisesti metafunktioiden osalta.

Luonnollisen kielen lauseet ja symboliresurssin ilmaukset eroavat toisistaan ideationaaliselta kannalta. O'Halloran (2007a: 227) kuvaa symboliresurssia ja toteaa, että symboliresurssin entiteettien semanttinen ala on kaventunut koskemaan vain ajan, tilan ja aineen suhteita. Myös prosessityypit eroavat toisistaan ja O'Halloran (mp.; 2005: 103) erottaakin symboliresurssista prosessityypin, jota ei esiinny luonnollisessa kielessä. Hän nimeää prosessin *operatiiviseksi prosessiksi*. Tiivistän seuraavaksi, miten O'Halloran (mts. 103–114) kuvaa operatiivisia prosesseja. Operatiiviset prosessit ovat kehittyneet prosesseista, jotka liittyvät materiaan. Konkreettisen materian entiteettejä voidaan suurentaa, pienentää, yhdistää ja niin edelleen. Matematiikan prosessit, esimerkiksi jakaminen tai kertominen, eroavat luonnollisen kielen prosesseista eikä niiden merkitys ole intuitiivista. Esimerkiksi äkkiseltään voisi ajatella, että aina, kun kerrotaan, lisätään jotakin – ja jokin siis suurenee. Matematiikassa näin ei kuitenkaan ole, sillä esimerkiksi kun kerrotaan yhtä pienemmällä luvulla, lopputulos on pienempi kuin lähtötilanne. (Mts. 103–104.) Operatiivisissa prosesseissa on inhimillinen tekijä, joka näkyy tekstin luonnollisen kielen osissa. Osallistujat ovat symboliresurssin merkintöjä, ja niissä inhimillistä tekijää ei ole. (Mts. 104–105.) Symboliresurssista puuttuvat kaikki tilanteeseen liittyvät elementit, eli symboliresurssin ilmauksia ei sidota tapahtuman aikaan, kestoon, paikkaan, olosuhteisiin tai muihin vastaaviin (mts. 110).

Osin operatiivisiin prosesseihin mutta ylipäänsä symboliresurssin ideationaaliseen metafunktioon liittyy se, että symboliresurssissa merkitystä ja maailmaa luodaan sillä, mihin ja miten teksti merkitään (O'Halloran 2005: 110–113). Matematiikan symbolimerkin-

12 Sivunumero viittaa pdf-tiedostoon, jossa ei noudateta alkuperäisen julkaisun sivunumerointia.

nöissä maailmaa ja merkitystä luodaan kokonaan uusien matemaattisten symbolimerkkien lisäksi esimerkiksi kirjaimiston valinnalla (latinalainen, kreikkalainen, heprealainen), merkin koolla, kursivoinnilla, lihavoinnilla, ylä- ja alaindekseillä ja muilla spatiaalisilla sijainneilla, lyhenteillä, sulkeilla sekä erilaisilla pilkuilla ja pisteillä (mts. 112). Symboliresurssissa siis viitataan aivan eri käsitteisiin ja entiteetteihin, kun teksti merkitään eri tavalla. Onkin valtava merkitysero, kun merkitään vaikkapa an, a_n tai a^n tai n, $\bar{n}$ tai $\mathbb{N}$ (eli $\mathbf{N}$). Nämä ovat ajan myötä konventionaalistuneita typografisia keinoja, jotka kantavat merkitystä ja luovat maailmaa. Niitä ei tule sekoittaa korostuskeinoihin, eli keinoilla ei ohjata lukijan huomiota. Esimerkiksi Reku (2004: 66) tulkitsee lihavoinnin korostukseksi sellaisessa kohdassa, jossa kyse on konventiosta ja merkityksen kantamisesta.

Ideationaaliseen metafunktioon liittyvät myös muut aineiston kohdat, joissa luodaan ja rakennetaan kokemusta maailmasta. Reaalimaailma näkyy aineiston kontekstitehtävissä. Kontekstitehtävissä kuitenkin konstruoidaan asiaintiloja, joiden logiikka poikkeaa arkipäivän logiikasta. Toisessa kontekstitehtävässä (LYM e1, s. 76–77) sairaudesta toipuvalle potilaalle annetaan noudatettavaksi kaksi eri harjoitusohjelmaa, ja harjoitusohjelmat poikkeavat toisistaan huomattavasti. Miksi potilaalle annettaisiin kaksi täysin erilaista ohjelmaa? Jos toipilaan on määrä kuntoutua, kumpi ohjelmista on kuntouttava, eli onko toinen liian kevyt tai toinen liian rasittava? Myös aineiston toisen kontekstitehtävän (YT e5, s. 104–105) asiaintila näyttäytyy erikoisena. Tehtävässä rakennetaan tulitikkurasioista pyramidi, jossa on tehtävän mukaan 33 kerrosta ja jonka viidennessä kerroksessa lasketaan olevan 367 tulitikkurasiaa. Koko pyramidiin menisi yhteensä 6 963 tulitikkurasiaa. Tehtävässä ei lasketa askien kokonaismäärää, mutta kokonaismäärä antaa kuvaa siitä, miten valtava rakennelma tehtävän tulitikkupyramidi oikeastaan on. Mihin kumman tarkoitukseen joku tai jotkut rakentaisivat tällaisen tulitikkupyramidin? Aineistossa siis konstruoidaan sellaisia reaalimaailman asiaintiloja, jotka näyttäytyvät arkikokemuksen kannalta varsin merkillisinä. On kuitenkin huomattava, että tätä havaintoa ei voi yleistää tutkimuksen aineiston ulkopuolelle, sillä tämä tutkimus on laadullinen ja kontekstitehtäviä on aineistossa vain kaksi.

4.2 Interpersoonainen metafunktio

Kun tekstiä tarkastellaan interpersoonaisen metafunktion kannalta, voidaan luonnollisesta kielestä tarkastella ensinnäkin osallistujarooleja eli vaikkapa persoonamuotoja. Lisäksi voidaan tarkastella suhtautumista: modaalisuutta ja esimerkiksi suhtautumisesta kieliviä sana-valintoja, kuten adjektiiveja, fokuspartikkeleja, kvanttoripronomineja ja modaalisuutta. (Shore 2012: 177–179.)

Kun otetaan muutkin semioottiset resurssit huomioon, voidaan O'Halloranin (2005: 169) mukaan multisemioottisesta tekstistä tarkastella esimerkiksi seuraavia asioita: intersemioottisia diskurssisiirtoja, joita tehdään puhefunktioilla, tapaluokilla ja esimerkiksi katseen suuntaa ohjaavilla nuolilla, intersemioottista arviointia ja modaalisuutta ja polaarisuutta, diskurssin suuntaa ohjaavaa salienssia, kirjasimen tyyliä, kokoa ja väriä sekä kuvan modaalisuuteen liittyvää kuvan ilmiasua.

Edellisessä luvussa oli esillä tapaus, jossa asiaintila ja entiteetin olemassaolo konstruoidaan jussiivilla: ”**Olkoon** lukujonon yleinen jäsen $a_n = 18n + 23,\ n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$.” (YT e3, s. 98–99). Matematiikassa on melko yleistä konstruoida jussiivilla lähtötilanne ja matematiikan abstrakteja entiteettejä. Mutta kun tapaa pysähtyy miettimään, poikkeaa tilanne reaalimaailmasta ja kaikesta siihen liittyvästä kielenkäytöstä. Kirjoittajan valta on suunnaton, jos hänellä on valta sallia entiteetin koko olemassaolo, käskeä jotakin eksistoimaan. Tilanne on lähes jumalallinen – ”Tulkoon valo!” Kirjoittaja ja autoritaarisuus näkyy tekstissä myös *direktiivin* osien käskyissä, mutta muutoin kirjoittaja häivytetään passiivilla. Millaiseksi sitten muodostuu lukijan osallistujarooli? Käsittelen sekä sitä että kontaktin ottamista lukijaan ensimmäisessä alaluvussa. Toisessa alaluvussa pohdin puolestaan modaalisuutta.

4.2.1 Lukijan osallistujarooli ja kontakti lukijaan

Esimerkkitehtävien tehtävänannot ovat samanlaisia kuin harjoitustehtävien tehtävänannot. Harjoitustehtävät ovat selvästi tehtäviä, jotka lukijan on tarkoitus ratkaista, mutta miten on esimerkkitehtävien laita? Mikä on niiden funktio? Toki niiden funktiona on, että niillä esitellään, miten teoriatekstissä kerrottua matemaattista teoriaa sovelletaan. Mutta onko lukijan tarkoitus ratkaista esimerkkitehtävät itse vai vain seurata, miten tehtävä ratkaistaan? Onko *direktiivin* osan käskyillä ja kysymyksillä siis tarkoitus saada lukija toimimaan vai ei? Interpersoonaisen metafunktion kannalta kyse on siis matematiikan oppimateriaalien käyttökonventiosta. Onko tarkoitus, että lukija vaikkapa peittää koko ratkaisun ja yrittää itse soveltaa oppimaansa teoriaa ennen kuin katsoo ratkaisun? Tällöin esimerkkitehtävä olisi kutakuinkin harjoitustehtävä, johon on ratkaisu heti tehtävän perässä eikä jossakin muussa paikassa. Ratkaisu kuitenkin on aina välittömästi tehtävänannon jälkeen, joten jos ajatellaan, että lukijan ei olisi tarkoitus nähdä sitä heti, olisi sen sijoittelu melko epätarkoituksenmukainen ellei outo.

Tekstissä on paljon passiivia, ja sama kysymys osallistujarooleista ulottuu siihenkin: onko aineistossa passiivin tarkoite avoin vai ei? Toisin sanottuna kun esimerkkitehtävissä *lasketaan*, *lisätään*, *sijoitetaan* ja *piirretään* sekä *muodostetaan ja ratkaistaan* (*yhtälö* tai *epäyhtälö*), kuuluuko lukijakin passiivin tekijöihin?

Karvonen (1995: 117) huomioi, että passiivia voidaan käyttää oppimateriaaleissa lisäämään normatiivisuutta, eli kertoa, miten yleensä tehdään tai olisi yleensä syytä tehdä. Aineistossa on paljon passiiveja, joilla aloitetaan virke. Shore (2008: 52) tulkitsee Makkonen-Craigin (2005: 67–163) tutkimusta ja summaa, että verbialkuisilla passiivilauseilla voidaan ilmaista suhtautumista – tai jäsentää tekstiä, mikä kuuluu tekstuaalisen metafunktion alaan. O’Halloran (2005: 114) esittää, että tietyt passiivit voivat toimia myös käskyinä; jos matematiikan tekstissä sanotaan esimerkiksi, että jotakin *nähdään*, oikeastaan kehotetaan lukijaa tekemään havainto. O’Halloranin (mp., mts. 102) esimerkissä ei ole kyseessä näköhavainto, vaan kaavan johtamisen jälkeen päättely aloitetaan *We see that*. Suomeksi vastaavassa kohdassa käyttäisin ehkäpä verbiä *havaitaan*. Tämän tutkimuksen aineistossa on *nähdään*, joka on hieman eri yhteydessä.

> 6) Koordinaatiston akselien asteikkoja kannattaa muuttaa niin, että kuvaajasta **nähdään** ainakin muutamia ensimmäisiä jäseniä.
>
> (YT e4, s. 100–101)

Esimerkin näköhavainnosta en kuitenkaan osaa sanoa, onko lukija toiminnassa mukana tai onko kyseessä käsky lukijalle. Palaan aavistuksen myöhemmin tähän esimerkkiin ja perustelen, miksi tilanne ei ole päivänselvä.

Passiivi tosiaan voi olla käsky lukijalle – ainakin aineiston ulkopuolisessa teoriatekstissä. Esimerkiksi teoriatekstissä sanotaan eräässä kohdassa *Lukujonon lukuja* ***kutsutaan*** *jonon jäseniksi tai termeiksi. Jäseniä* ***merkitään*** *alaindeksillä varustetulla kirjaimella*. (YT, s. 131[13]) Tässä passiivin voi tulkita käskyksi lukijalle: käytä käsitteille nimenomaan näitä nimiä ja kirjoita kuvatulla tavalla. Myös esimerkkitehtävien *ratkaisun* ulkopuolisissa yksiköissä passiivia voidaan käyttää käskynä. Esimerkiksi yhdessä *selityksen* yksikössä on ensimmäisessä virkkeessä seuraava passiivi: *Toista jäsentä laskettaessa* ***huomattiin****, että*

13 Viittaus on poikkeuksellisesti alkuperäisen teoksen sivuun, ei tämän tutkimuksen liitteeseen.

$\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$ (OM e3, s. 92–93). Kyseinen passiivi vaikuttaa vahvasti O'Halloranin (2005: 114) luonnehtimalta kehotusfunktioiselta passiivilta. Eli sen sijaan, että tässä kuvattaisiin, että ylipäänsä joku ihmisolento on *huomannut* jotakin, kohdistetaan lukijan huomiota: suuntaa huomiosi laskuun ja tee laskusta tämä nimenomainen huomio. *Selitys* jatkuu: *Lukujonon jäsen* ***voidaan*** *siis laskea vähentämällä edellisestä jäsenestä luku* $\frac{2}{4}$ (OM e3, s. 92–93). Tässä passiivin tarkoite ei olekaan enää niin selvä, sillä palaan uudestaan samaan kysymykseen: onko lukijan tarkoitus laskea jotakin vai ei?

Miten oppimateriaaleja ja niissä olevia esimerkkitehtäviä siis käytetään – tai miten niiden laatijat ovat ajatelleet niitä käytettävän? Tossavaisen (2015: 129) mukaan lukion opiskelijat käyttävät esimerkkitehtäviä lähinnä harjoitustehtävien apuna. Opiskelijoille esimerkkitehtävät kenties ovatkin usein malleja, joita kopioidaan ja sovelletaan, kun itse tehdään tehtäviä. Kokemukseni perusteella tiedän, että opetuksessa puolestaan matematiikan oppimateriaaleja käytetään eri tavoilla sen mukaan, millaisia didaktisia lähestymistapoja ja pedagogisia periaatteita opettaja haluaa soveltaa. Oppimateriaalin rooli opetuksessa vaihtelee siis suuresti. Yksi opettaja voi noudattaa täsmällisesti oppimateriaalin etenemistä jopa niin tiukasti, että opetustilanteessa hän esittää luokan edessä vain ja ainoastaan materiaalissa esitetyt esimerkit ja teorian ja tismalleen siten kuin ne materiaalissa esitetään. Toinen saattaa pitää oppimateriaalia pelkkänä harjoitustehtäväkokoelmana ja sivuuttaa opetustilanteessa materiaalin kaiken muun sisällön. Käänteistä opetusta tai (tehostettua) kisällioppimista soveltavien opettajien opiskelijat puolestaan lukevat usein teorian ja esimerkit itsenäisesti. Erilaiset oppimateriaalin käyttötavat näkyvät myös siinä, miten aineiston teoksia kuvaillaan ja markkinoidaan kustantajien verkkosivuilla. *Yhteisestä tekijästä* kuvataan, että ”se soveltuu hyvin erilaisille pedagogisille näkemyksille” (Sanoma Pro). *Lukion yhteisestä matematiikasta* puolestaan mainostetaan: ”Oppimateriaalin havainnolliset esimerkit ja täsmällinen esitystapa tukevat oppilaan itsenäistä työskentelyä” (Edita).

Erilaisista käyttötavoista tai siitä, miten kustantajat materiaaleja kuvailevat, ei kuitenkaan saa vihjeitä, ovatko esimerkkitehtävien käskyt ja kysymykset lukijalle suunnattuja ja kuuluuko lukija esimerkkitehtävien passiiviin mukaan. Yksi tulkintatapa voisi olla, että esimerkiksi passiivilla tarkoitettaisiin samaa ihmisjoukkoa läpi koko teoksen, jolloin sekä teoriassa että esimerkkitehtävissä lukija olisi passiivissa mukana. Mielestäni tällä tavalla ajateltaessa oiottaisiin hieman, sillä materiaalin eri jaksojen funktiot eivät ole tismalleen samoja. Vaikka esimerkkitehtävien tehtävänannot ovat samanlaisia kuin harjoitustehtävien tehtävänannot, ei voi silti automaattisesti väittää, että tehtävien funktio olisi sama ja siten molempien toimintakehotukset olisi suunnattu lukijalle.

Ainoa vihje siitä, miten esimerkkitehtäviä tulisi kenties tarkastella, tulee eräästä *ohjeen* yksikön käskystä. Molemmat *ohjeen* yksiköthän ovat samassa esimerkkitehtävässä, ja niistä oli jo hieman puhetta esimerkin 6 (s. 50) yhteydessä. Kummankin *ohjeen* yksikön käskyissä otetaan lukijaan suora kontakti, mutta täytyy muistaa, että *ohjeen* yksiköt ovat *ratkaisusta* erillisiä. Vaikka siis esimerkin ensimmäisessä *ohjeessa* (s. 100–101) käsketään ***Selvitä**, kuinka lukujonon kuvaaja piirretään laskimellasi*, ei käsky muodosta lukijalle velvoitetta ratkaista esimerkkitehtävä, vaan lukijaa ohjeistetaan ylipäätään selvittämään asia – esimerkiksi tulevia harjoitustehtäviä tai sähköistä ylioppilaskoetta varten. Sen sijaan tehtävän c-kohdassa (s. 102–103) *ohje* alkaa ***Muuta** akselien asteikkoja niin, että **etsitty** kuvaajan piste tulee näkyviin*. Tässä siis lukijaa ei ohjata mitenkään yleisellä tasolla vaan tismalleen kyseisen tehtävän ratkaisemisessa, joka viittaa siihen, että lukijan on tarkoitus replikoida kaikki ratkaisun vaiheet.

Tulkinnassa täytyy kuitenkin ottaa huomioon ensinnäkin se, että kun esimerkkitehtävien erilaisia otsikoita selitetään kyseisen teoksen (YT) alussa sivulla 3, on puheena olevan esimerkkitehtävän otsikkotyypin selityksessä: ”Laskimen käyttöön opastetaan erityisesti soveltavissa esimerkeissä” ja toiseksi se, että käsiteltävä esimerkkitehtävä on otsikoitu erikseen *Lukujono laskimella*. Kyseisessä teoksessa esimerkkitehtäviin kietoutuu siis välillä useita funktioita, mutta vastaavaa tendenssiä en havaitse aineiston muissa teoksissa. En siis uskalla yleistää esimerkkitehtävien käyttötapaa vain tämän esimerkkitehtävän perusteella. Toisin sanoen en siis osaa sanoa mitään lopullista siitä, otetaanko esimerkkitehtävien käskyillä, kysymyksillä ja passiivilla kontaktia lukijaan. Lukijan osallistujarooli voi siis olla pelkkä ratkaisuprosessin tarkkailija tai toisin tulkitessa lukija voi olla suoraan käskytettävänä.

Lukijaan otetaan sen sijaan kontaktia esimerkiksi värejä käyttämällä. Väriä voidaan käyttää laskutoimituksen keskellä. Kuvissa 6’ ja 18 on tästä kaksi esimerkkiä. Molemmat kuvat ovat samasta tehtävästä, kahdesta eri alakohdasta. Tehtävä on kyseisessä teoksessa ensimmäinen tehtävä, jossa käytetään lukujonon yleisen jäsenen merkintää a_n. Väriä käytetään laskutoimituksessa havainnollistamaan, mitä merkintä tarkoittaa laskutoimituksen kannalta, eli sitä, mihin numerot merkitään, kun kaavaan sijoitetaan lukuja.

$$a_1 = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

$$a_2 = \frac{2}{2+1} = \frac{2}{3}$$

$$a_3 = \frac{3}{3+1} = \frac{3}{4}$$

$$a_4 = \frac{4}{4+1} = \frac{4}{5}$$

Kuva 6’. Väri symboliresurssissa interpersoonaisena keinona.

(YT e1, s. 94–95)

Sijoitetaan $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$ ja $n = 4$ lausekkeeseen $a_n = 4 \cdot (-1)^n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$.

$$a_1 = 4 \cdot (-1)^1 = 4 \cdot (-1) = -4$$

$$a_2 = 4 \cdot (-1)^2 = 4 \cdot 1 = 4$$

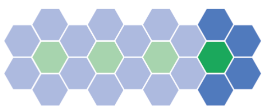
$$a_3 = 4 \cdot (-1)^3 = 4 \cdot (-1) = -4$$

$$a_4 = 4 \cdot (-1)^4 = 4 \cdot 1 = 4$$

Kuva 18. Väri symboliresurssissa interpersoonaisena keinona.

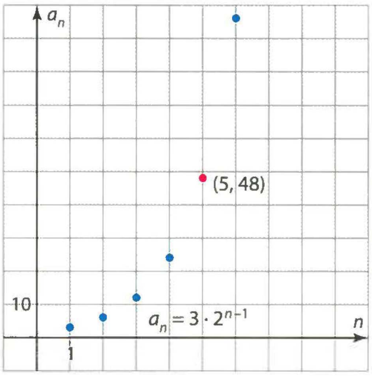
(YT e1, s. 94–95)

Huomiota suunnataan väreillä myös kuvaresurssin tiettyihin komponentteihin. Kuvan 8’ piirroskuviossa tummemmalla eli salientimmalla väripaletilla korostetaan piirroskuvioon lisättyä osaa. Kuva 10’ on puolestaan esimerkistä, jossa ratkaisussa sekä kuvan 10’ b-kohdassa että sen jälkeen olevassa c-kohdassa (s. 102–103) suunnataan lukijan huomio tismalleen yhteen koordinaatiston pisteeseen, joka merkitään muista merkinnöistä erottuvalla, salientilla punaisella värillä.



Kuva 8’. Salienssi interpersoonaisena keinona piirroskuviossa.

(OM j, s. 86–87)



Kuva 10'. Salienssi interpersoonaisena keinona koordinaatistossa.
(YT e4, s. 100–101)

4.2.2 Modaalisuus

Modaalisuudella tarkoitetaan luonnollisen kielen kannalta sitä, miten todenmukaiseksi tai todennäköiseksi jokin asiaintila arvioidaan (VISK § 1551). Aineistossa modaaliseksi tulkittavia ilmauksia on melko vähän. Esimerkiksi modaalisia partikkeleita tai adpositioita ei aineistossa ole. Esittelen seuraavaksi aineistossa olevia luonnollisen kielen modaalisia ilmauksia ja lopuksi luon silmäyksen siihen, miten tiedon varmuutta rakennetaan muilla semioottisilla resursseilla.

Aineistossa on *voida*-verbillisiä ilmauksia, joissa liikutaan dynaamisen ja deonttisen tulkinnan rajoilla (ks. esim. VISK § 1554). Seuraavassa on niistä kaksi esimerkkiä.

7) Määritä lukujonon – – sanallinen sääntö, jolla **voidaan** laskea mikä tahansa jäsen.
(OM e2, s. 90–91)

8) Lukujonoa **voi** yleensä jatkaa usealla eri tavalla. Esimerkin 1 jonoja **voi** jatkaa myös muilla kuin ratkaisussa esitetyillä tavoilla.
(OM e1, s. 88–89)

Esimerkeissä *voida*-verbillä implikoidaan, että on olemassa mahdollisuus saavuttaa puheena oleva asiaintila. Mahdollisuuksien toteutuminen liittyy matematiikkaan, ja velvoitteen kohteeksi voi tulkita minkä tahansa inhimillisen olion. On kuitenkin tulkittava, onko kyseessä dynaaminen modaalisuus eli ulkoisista olosuhteista aiheutuva mahdollisuus toimia vai deonttinen modaalisuus eli lupa toimia tietyllä puheyhteisön sallimalla tavalla. Tulkinnan päättämisessä lähestytään filosofista pohdintaa matematiikan perusolemuksesta. Jos (ja kun) matematiikka on ihmisen luoma konstruktio käsitteellisten riippuvuussuhteiden kuvaamiseen, ovatko matematiikasta peräisin olevat rajoitteet (matemaattisia) olosuhteita, joista aiheutuu jotakin, vai (matematiikan) puheyhteisön normeja? Filosofit ovat jo kauan yrittäneet määritellä, mitä matematiikka on, mutta matematiikalle ei ole mitään yhtä yleisesti hyväksyttyä määritelmää. Modaalisuuden lajin päättämiseksi pitää ensin siis päätellä, onko esimerkkitehtävissä matematiikka lähempänä sääilmiön tapaisia asioita vai esimerkiksi liikennesääntöjen tapaisia asioita. Vaikka matematiikan säännöt tuntuvat luonnonlakien kaltaisilta, eikä niitä voi muuttaa esimerkiksi lakien ja asetusten tavoin, on matematiikka silti pohjimmiltaan ihmisen luoma tiede. Kyse on siis tiedeyhteisön normeista. Tulkinta ratkeaa täten deonttiseksi.

Aineistossa on modaalisia ilmauksia, jotka voidaan edellistä selvemmin tulkita deonttisiksi. Seuraavassa on esimerkkejä tällaisista ilmauksista.

9) Yleisen jäsenen a_n **tulee** olla pienempi kuin 50 000.

(YT e3, s. 98–99)

10) Rasioiden lukumäärän a_n **tulee** olla positiivinen.

(YT e5, s. 104–105)

Se, mitä velvoitetaan toimimaan tietyllä tavalla, on subjekti (*yleinen jäsen*, *rasioiden lukumäärä*), ja se on genetiivissä. Esimerkkien subjektit eivät ole intentionaalisia toimijoita vaan elottomia ja täysin abstrakteja entiteettejä. Mahdollisuudet eivät siis liity agentin kykyihin vaan subjektin ominaisuuksiin. Kun aineistossa kielletään tai sallitaan tai jokin on mahdollista, on sallimisen normilähde implikatiivinen eli sitä ei suoraan sanota, mutta se on pääteltävissä. Normilähteinä toimivat tehtävänanto, reaalimaailma tai matematiikan säännöt, esimerkiksi lukujonon määritelmä. Esimerkissä 9 normilähde on esimerkkitehtävän tehtävänannossa esitetty kysymys (*Kuinka moni lukujonon jäsenistä on pienempi kuin 50 000?*). Esimerkissä 10 puolestaan normilähteenä on reaalimaailma; tulitikkurasioita ei voi olla olemassa negatiivisia määriä. Ison suomen kieliopin (VISK § 1577, § 1668) mukaan *tulla* on yleinen ohjeissa ja lupadirektiiveissä. Edellä olevien esimerkkivirkkeiden funktiona on ohjata ratkaisun etenemistä eli eksplikoida, millaisia rajoja matematiikan entiteeteille tulee asiaintilasta.

Ainoa ilmiselvä dynaamisen modaalisuuden ilmaus on seuraavassa esimerkissä.

11) Kuinka pitkän lenkin toipilas tekee viitenä ensimmäisenä päivänä ja 20. päivänä kummankin ohjelman mukaan, kun hän **jaksaa** kävellä ensimmäisenä päivänä 150 m?

(LYM e1, s. 76–77)

Esimerkissä on fyysinen edellytys *jaksaa*, ja edellytys tulee toimijan eli *toipilaan* sisältä. *Toipilas* on aineistossa ainoa subjektin tarkoite, jolla on fyysisiä tai henkisiä mahdollisuuksia, sillä aineistossa ei ole muita kontekstitehtäviä, joissa olisi inhimillisiä tarkoitteita. Siksi onkin ymmärrettävää, ettei aineistossa ole muita selvästi dynaamisen modaalisuuden ilmauksia.

Aineistossa on pari nesessiiviverbiä.

12) Luku *n* ilmaisee jonon jäsenen järjestysluvun, joten sen **pitää** olla positiivinen kokonaisluku.

(LYM e4, s. 84–85)

6’) Koordinaatiston akselien asteikkoja **kannattaa** muuttaa niin, että kuvaajasta nähdään ainakin muutamia ensimmäisiä jäseniä.

(YT e4, s. 100–101)

Ensimmäisessä esimerkissä välttämättömyys kohdistuu taas matematiikan entiteettiin ja tilanne vertautuu esimerkkien 9 ja 10 tilanteisiin, joissa asetettiin rajoituksia abstraktille matematiikan tarkoitteelle. Esimerkki 6’ puolestaan edustaa praktista välttämättömyyttä (ks. esim. VISK § 1555). Lukijalle annetaan arvio, ja arvion antaja on tehnyt päätelmän, että tietyn tavoiteltavan asiaintilan saavuttamiseksi lukijan on tehtävä jotakin.

Aineiston muista modaalisista ilmauksista poikkeaa modaalinen vaikutelmaverbi *näyttää*. Sitä käytetään yhdessä esimerkkitehtävässä ratkaisun jokaisessa alakohdassa.

13) Lukujono 2, 4, 6, … **näyttää** muodostuvan suuruusjärjestyksessä olevista parillisista luonnollisista luvuista.

(OM e1, s. 88–89)

14) Lukujono π, π, π, … **näyttää** olevan vakiojono.

(OM e1, s. 88–89)

Näyttää implikoi ihmishavaitsijan näkökulmaa. Se edustaakin episteemistä modaalisuutta (ks. esim. VISK § 1556), eli sillä ilmaistaan arvio tai päätelmä, miten mahdollinen, välttämätön tai todennäköinen jokin asiaintila on. Edellä olevissa esimerkeissä sillä päätellään, millainen lukujono mahdollisesti on. Muita episteemisen modaalisuuden ilmauksia aineistossa ei ole, eli missään muussa kohdassa ei esitetä arvioita asiaintilojen varmuuksista.

Modaalisia aineksia aineistossa on luonnollisessa kielessä joka tapauksessa ylipäätään melko vähän, vaikka niitä edellä esittelinkin. Suurimmaksi osaksi asiaintilat konstruoidaan indikatiiveilla ehdottoman todenmukaisina väitteinä, jotka ovat joko myöntö- tai kieltomuotoisia.

Symboliresurssissa puolestaan on vähemmän edes valinnanvaraa kuin luonnollisessa kielessä. O'Halloran (2005: 115) käsittelee symboliresurssin ilmauksia, ja toteaa, että symboliin ei ikinä voi liittää kieltoa, moduksia tai muita modaalisia ilmauksia. Mahdollisuuksien arviointi toteutuu symboliresurssilla vain, kun arvioidaan tilastollisia merkitsevyyksiä (esimerkiksi p-arvot, vaikkapa $p < 0{,}05$), ja kieltomuodolle puolestaan on oma symbolinsa, joka on usein muodostettu vetämällä viiva myöntömuotoisen symbolin yli (esimerkiksi $\neq$) (mp.). Symboliresurssilla asiat esitetään aivan ehdottomana totuutena, josta ei voi neuvotella, jota ei voi kyseenalaistaa ja jota ei voi keskeyttää.

Kuvaresurssin puolella esimerkiksi taulukko on sellainen asiaintilan konstruointi, ettei siihen voi liittää mitään modaalisia ilmauksia, vaan taulukon esittämä asiaintila eli taulukon esittämät asioiden yhteydet ovat ehdottoman varmoja.

Kuvaresurssin modaalisuuteen liittyy myös aineiston muiden kuvien modaalisuus. Kress ja van Leeuwen (2006: 154–174) kuvailevat, millaiset tekijät rakentavat kuvissa modaalisuutta. Aineiston kuvien modaalisuuden arvioinnissa tärkeintä on se, millaiset kulttuuriset odotukset lukijalla on aineiston teoksista (mts. 158, 171). O'Halloran (2005: 140–142) korostaa Kressin ja van Leeuwenin teoriasta samaa ja huomioi, että matemaattisten kuvien modaalisuus ei synny niinkään siitä, että ne olisivat valokuvan lailla tosimaailman kuvauksia, vaan siitä, että lukijalla on kulttuurinen odotus siitä, että matemaattisen kuvan esittämä asiaintila on tosi. O'Halloran (2005: 18, 74, 208–209) toteaa, että matematiikka ylipäätään koetaan kulttuurissamme ehdottoman totena, joten myös kuviin liittyvät kulttuuriset odotusarvot syntyvät tästä käsityksestä. O'Halloran (2015a: 70–71) puhuu myös kuvien tuotantotavan vaikutuksesta siihen, miten uskottaviksi kuvien esittämät asiaintilat tulkitaan. Aineiston teoksissa uskottavuutta ja auktoriteettia tukee se, että kuvat on selvästi tehty kuvankäsittelyllä viimeistellyn yhtenäisiksi. Esimerkiksi käsin piirrettyjä ja ruutupaperilta skannattuja kuvia ei koettaisi näin maksimaalisen tosiksi.

Myös muut ulkoasuun liittyvät valinnat korostavat tietosisällön ehdotonta totuutta ja uskottavuutta. Teosten asettelut noudattavat matematiikan oppimateriaaleihin vakiintunutta muotoa (vrt. O’Halloran 2007b: 87). Näin teokset sijoitetaan matematiikan oppimateriaalien genreen, josta lukijalla todennäköisesti on kulttuurinen odotus, että sisältö on absoluuttista totta. Edelleen uskottavuutta luodaan valituilla kirjasimilla. Ulkoasu ei henkisi samaa auktoriteettia ja uskottavuutta, jos kirjasimina käytettäisiin esimerkiksi kaunokirjoitusta matkivaa kirjasinta tai vaikkapa (pahamaineista) Comic Sansia.

4.3 Tekstuaalinen metafunktio

Kun tekstiä tarkastellaan tekstuaalisen metafunktion kannalta, voidaan tarkastella esimerkiksi koheesiokeinoja ja teeman- ja informaationkulkua. Luonnollisen kielen resurssin osalta voidaan tarkastella siis esimerkiksi kohesiivisia kieliopillisia sidoksia, kuten anaforisia pronomineja ja ellipsiä tai kytkentöjä, vertailua ja toistoa tai teemankulkua ja uusien tarkoitteiden tuomista tekstiin (Shore 2012: 180–183).

O’Halloran (2005: 167) esittää, että kun tarkastellaan multisemioottisia tekstejä, tekstuaaliseen metafunktioon kuuluvat intersemioottiset koheesiokeinot, kuten suora viittaus, intersemioottinen toisto ja semioottinen viittaus sekä intersemioottinen sekoittuminen, diskursiiviset linkit, kuvatekstit ja muut multisemioottiset otsikot ja elementtien nimeämiset, intersemioottiset korvaukset, intersemioottiset adoptiot, deiktiset ilmaukset, elementtien rinnakkain tai vastakkain asettaminen tai kehystäminen sekä koheesio, jota luodaan kirjasimen ja värin käytöllä.

Käsittelen ensin informaationkulun hahmottamista aineiston teksteistä ja sen jälkeen huomioin lyhyesti, millaisilla keinoilla aineistossa luodaan koheesiota.

4.3.1 Informaationkulku

Aineiston esimerkkitehtävien teemankulku on jo pelkästään luonnollisen kielen kannalta monissa kohdin hieman hankalasti määritettävissä. Tehtävät sisältävät paljon lauseita, jotka alkavat suoralla käskyllä tai passiivilla. Tällaiset lauseet ovat teemattomia, eli niillä ei kuljeteta teemaa eteenpäin (VISK § 1318, § 1378; Shore 2008: 50–52).

Shore (2008: 52) tulkitsee Makkonen-Craigin (2005: 67–163) tutkimusta ja esittää, että verbialkuisilla passiivilauseilla esimerkiksi jäsennetään tekstiä eli paitsi kommentoidaan metatekstuaalisesti myös kerrotaan, mitä seuraavaksi tulee. Aineistossa on nähtävissä, että passiivialkuisilla lauseilla kerrotaan, mitä seuraavaksi tapahtuu. Niillä siis jäsennetään tekstiä. Passiiveja, joilla aloitetaan aineistossa lause, ovat esimerkiksi *lasketaan*, *merki-*

tään, *sijoitetaan*, *muodostetaan*, *piirretään* ja *etsitään*. Kaikkien näiden tehtävänä voidaan nähdä se, että niillä kerrotaan lukijalle, mitä seuraavaksi tehdään. Kun esimerkiksi eräässä esimerkissä ensin aloitetaan *tulkinta*: ***Merkitään** jonon yleinen jäsen ja luku 133 yhtä suuriksi ja **ratkaistaan** yhtälöstä n*, niin seuraavaksi tehdään kuvattu merkintä ja laskun ratkaisu (LYM e4, s. 84–85).

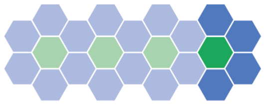
Iso osa passiivialkuisista lauseista onkin *tulkinnan* osissa, joissa ne kuvaavat, miten *tulkintaa* seuraava *lasku* etenee tai miten *visuaalistus* muodostetaan. Passiivialkuisia lauseita on myös *selityksissä*, joissa ne puolestaan kuvaavat, mitä *laskun* laskutoimituksessa tapahtuu.

Teeman- ja informaationkulun määrittämisessä on otettava huomioon, että tarkasteltavassa aineistossa luonnollinen kieli ei ole ainoa semioottinen resurssi. Herääkin kysymys, mikä on teema tai reema – tai annettu tai uusi –, kun otetaan huomioon tekstin muut semioottiset resurssit. Miten aineiston informaationkulkua tulisi tarkastella?

Kuvaresurssissa Kressin ja van Leeuwenin (2006: 179–201) teorian mukaan annettu on vasemmalla ja uusi oikealla. He argumentoivat, että tätä voi soveltaa myös kaavioihin (mts. 184). O'Halloran (2011: 122) huomauttaa, että Kress ja van Leeuwen eivät ole kehittäneet teoriaansa aineistolähtöisesti vaan pikemminkin soveltavat graafisen suunnittelun periaatteita, kun he analysoivat aineistoa. Teorian soveltumista sekä matemaattisiin kuviin että aineistoon kokonaisuutena on joka tapauksessa syytä pohtia kahdesta syystä. Ensinnäkin lukijalla on todennäköisesti kulttuurisesti sisäänrakennetut oletukset annetun ja uuden sijainnista. Toiseksi sekä teosten taiton ovat tehneet että teosten kuvat ovat piirtäneet jotkut, joilla erittäin todennäköisesti on tieto graafisen suunnittelun perusteista tai vähintään samat kulttuuriset sisäänrakennetut oletukset kuin lukijalla – eli ihmiset, jotka suurella todennäköisyydellä noudattavat edellä mainittua Kressin ja van Leeuwenin teoriaa.

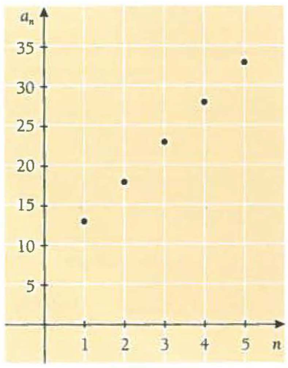
Annetun ja uuden sijainnit näkyvät koko aineistossa esimerkiksi siinä, että *selitys* sijoitetaan lähes aina oikealle eli uudeksi asiaksi. Aineistossa on yksi *selitys*, joka ei ole oikealla, vaan se sijaitsee tehtävän varsinaisen *ratkaisun* alapuolella (OM e1, s. 88–89). Kressin ja van Leeuwenin teorian mukaan ylhäällä sijaitsee ideaalinen ja alhaalla todellinen. Ylhäällä on siis jokin kuviteltavissa oleva ihannekuva, ja alhaalla puolestaan on informatiivinen ja käytännönläheinen osuus. (Kress – van Leeuwen 2006: 186–201.) Edellä mainitussa esimerkkitehtävässä hahmotellaan ensin tehtävän ratkaisu, jota sitten kommentoidaan *selityksessä* näin: *Esimerkin 1 jonoja voi jatkaa myös muilla kuin ratkaisussa esitetyillä tavoilla*. Voi siis tulkita, että kyseisten tekstien sijainneissa toteutuu nimenomaan ideaalisen ja todellisen ajatus, eli ensin esitetään ideaalitilanteen ratkaisu, josta annetaan lisäinformaatiota.

Jo pariin kertaan esillä olleeseen piirroskuvaan 8’ voi soveltaa annettua ja uutta. Tehtävänannossa annettua kuviotahan voisi periaatteessa jatkaa kumpaan suuntaan tahansa, mutta sitä jatketaan nimenomaan oikealle ja uutta osaa korostetaan tekemällä siitä salientti alkuperäistä kuviota tummemmilla väreillä.



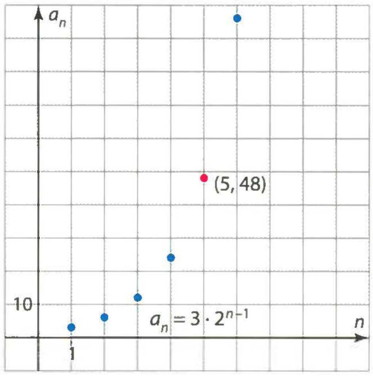
Kuva 8’. Annettu ja uusi kuvaresurssissa.
(OM j, s. 86–87)

Varsinaisissa matemaattisissa kuvissa alan konventiot sanelevat paljon, mitä kuvissa on tai ei ole ja missä elementit sijaitsevat. Sommittelun periaatteita eli annettua tai uutta ei siis välttämättä voi aivan suoraan soveltaa niihin. Matematiikan konventioita noudatetaan esimerkiksi koordinaatistoissa (LYM e2, s. 78–81 ja YT e4, s. 100–103). Yhdestä koordinaatistosta on esimerkki kuvassa 19 ja toisesta kuvassa 10’ (s. 61). Tällaisia kuvia piirtävillä ei ole siis erityistä vapautta sommitella koordinaatiston akseleja, niiden nuolia ja nimiä, lukuarvoja ja jaotusta tai koordinaatistoon merkittäviä pisteitä.



Kuva 19. Matemaattinen kuva, josta ei voi tulkita annettua ja uutta.
(LYM e2, s. 78–79)

Ainoa asia, minkä kuvien piirtäjä on oikeastaan voinut valita, on erivärisen pisteen merkitseminen kuvaan 10’ ja aineistossa sen jälkeen tulevaan kuvaan (s. 100–103). Kuvassa 10’ on koordinaatisto tehtävän b-kohdasta. Se on a-kohdan (s. 100–101) koordinaatiston



Kuva 10’. Annettu ja uusi koordinaatiston pisteen merkinnässä.
(YT e4, s. 100–101)

kanssa muuten identtinen, mutta yhden pisteen väriä on muutettu ja koordinaatistoon on merkitty pisteen koordinaatit. Pisteen koordinaatit ilmoitetaan selvyyden vuoksi aina pisteen lähellä. Matematiikan konventiot eivät kuitenkaan sanele sitä, missä kohdassa pisteen ympärillä koordinaattien pitäisi olla. Esimerkiksi MAOL-taulukoissa, joissa esitellään lukiomatematiikan merkinnät, merkitään pisteen nimi tai sen koordinaatit pisteen yläpuolelle tai pisteen vasemmalle tai oikealle puolelle (MAOL 2013: 23, 36–37, 40). Sekä kuvan 10’ koordinaatistossa että saman esimerkin c-kohdassa huomion kohteena olevan pisteen koordinaatit annetaan pisteen oikealla puolella eli uutena asiana. Pisteen koordinaatit ovat nimenomaan uutta tietoa, sillä ne eivät esiinny tehtävässä ennen koordinaatistoa.

Annetun ja uuden sijaintiperiaatteet toteutuvat nähdäkseni myös taulukoissa. Aineiston kaikissa taulukoissa tehdään laskutoimitus oikeassa sarakkeessa, eli laskun lopputuloksena oleva uusi on oikealla. Vasemmalla oleva annettu saadaan joko suoraan *direktiivistä* tai se päätellään *tulkinnan* osassa ennen taulukkoa.

Symboliresurssiin pätee tietyssä määrin annetun ja uuden ajatus, sillä laskujen laskeminen ja kaavojen johtaminen etenee tietyssä mielessä kuten luonnollisen kielen teksti eli vasemmalta oikealle ja ylhäältä alas. Itse laskuprosessihan ei etene välttämättä vasemmalta oikealle vaan seuraa laskujärjestystä, mistä myös O’Halloran (2005: 124) huomauttaa. Meaney (2004: 14[14]) tosin kuvaa symboliresurssin lukureittiä, että lukijan on tarkasteltava laskua myös oikealta vasemmalle ja alhaalta ylös, minkä näkisin heijastavan laskujärjestyksen vaikutusta laskutoimitukseen. O’Halloran (2005: 121) havainnoi, että kun symbolimerkinnöillä ilmaistaan väite, sen esitysjärjestys ja -muoto noudattavat matematiikan syntagmaattisia konventioita. O’Halloranin (mts. 124) mielestä symbolimerkinnöistä on kui-

14 E-kirjassa ei ole sivuja, joten sivunumero viittaa pdf-tiedostoon, joka syntyy, kun kirjasta lataa luvun 4.

tenkin hahmotettavissa teema ja reema siten, että teema on yhtälön vasemmalla puolella oleva merkintä. Näiden ajatusten voi nähdä toteutuvan aineistossa siten, että kun tehtävissä esitetään lukujonon entiteetti, annetaan aina vasemmalla aiemmin esitelty merkintä a_n ja yhtäläisyysmerkin oikealla puolella tulee uusi asia eli se, millaisella säännöllä lukujono kyseisessä tehtävässä muodostuu. Toisaalta merkinnän järjestys on myös nimenomaan matematiikan konventio, eikä erityinen informaationkuljetuksen valinta.

Edellä kuvattu tapa hahmottaa symboliresurssista teema ja reema tuo kuitenkin ongelmia, kun otetaan mukaan muut semioottiset resurssit, joiden osaksi symboliresurssia upotetaan. Kun symboliresurssia upotetaan luonnollisen kielen sekaan tai osaksi kuvaresurssia, syntyy kokonaisuuksia, joissa saattaa esimerkiksi teeman tai reeman sisällä olla uusi teema ja reema. Miten esimerkiksi seuraavien esimerkkien teema tai reema pitäisi hahmottaa?

> 15) Lukujono $a_n = 432 - 13n,\ n = 1,\ 2,\ 3,\ \dots,$ kuvaa rasioiden määrää eri kerroksissa.
>
> (YT e5, s. 104–105)

> 16) Jonon yleinen jäsen on $b_n = \dfrac{n}{n+1}$.
>
> (LYM e3, s. 82–83)

Ensimmäisen esimerkin teemapaikalla on symboliresurssin entiteetti, jossa O'Halloranin (2005: 124) mukaan olisi siis uusi teema eli a_n ja teeman sisäinen reema, johon kuuluu ainakin $432 - 13n$. Olisiko n vielä sitten toinen uusi teeman sisäinen teema ja 1, 2, 3, … toinen teeman sisäinen reema? Vastaavalla tavalla toisessa esimerkissä reeman sisällä on sekä teema b_n että reema $\dfrac{n}{n+1}$.

Vastaavia tulkintaongelmia syntyy myös taulukoissa. Jos vasen sarake on annettua ja oikea uutta, onko oikeassa sarakkeessa lisää annettuja ja uusia? Ja mihin laskutoimituksissa vedetään annetun ja uuden raja? Monennenko yhtäläisyysmerkin kohdalla annettu vaihtuu uudeksi? Kuvassa 20 on esimerkki taulukosta, jossa oikeassa sarakkeessa on useita yhtäläisyysmerkkejä sisältävä laskutoimitus. Kaikkia teorioita soveltamalla siinä on siis annettu ja uusi ja uuden sisällä taas annettua ja uutta.

n	$b_n = \dfrac{6 \cdot (-1)^n}{n}$
1	$b_1 = \dfrac{6 \cdot (-1)^1}{1} = \dfrac{6 \cdot (-1)}{1} = \dfrac{-6}{1} = -6$
2	$b_2 = \dfrac{6 \cdot (-1)^2}{2} = \dfrac{6 \cdot 1}{2} = \dfrac{6}{2} = 3$
3	$b_3 = \dfrac{6 \cdot (-1)^3}{3} = \dfrac{6 \cdot (-1)}{3} = \dfrac{-6}{3} = -2$
4	$b_4 = \dfrac{6 \cdot (-1)^4}{4} = \dfrac{6 \cdot 1}{4} = \dfrac{6}{4} = \dfrac{3}{2} = 1\dfrac{1}{2}$
5	$b_5 = \dfrac{6 \cdot (-1)^5}{5} = \dfrac{6 \cdot (-1)}{5} = -\dfrac{6}{5} = -1\dfrac{1}{5}$
19	$b_{19} = \dfrac{6 \cdot (-1)^{19}}{19} = \dfrac{6 \cdot (-1)}{19} = -\dfrac{6}{19}$

Kuva 20. Taulukossa uuden sisällä annettua ja uutta.

(LYM e2, s. 80–81)

Kaiken kaikkiaan informaationkulun määrittäminen multisemioottisesta matemaattisesta tekstistä vaikuttaa olevan problemaattista. Vaikka tehtävissä on pysyvä topiikki, ovat annetun ja uuden rajat välillä vaikeasti määritettävissä. Teoriat, jotka on kehitetty pelkästään yhteen semioottiseen resurssiin eli luonnolliseen kieleen tai kuvaan, eivät tunnu sopivilta tai välttämättä edes relevanteilta, kun tarkastellaan tekstiä, jossa luonnollisen kielen ja kuvaresurssin sisällä on symboliresurssia. Erityisesti symboliresurssin upottaminen muihin resursseihin tuo vaikeuksia teorioiden soveltamiseen.

4.3.2 Koheesiokeinot

Aineistossa luodaan koheesiota monin eri keinoin. Kun luvussa 3.2 esittelin intersemioottisia ilmiöitä, tuli lyhyesti esille, että yhteiskontekstoinnilla luodaan koheesiota.

Koheesiota luodaan myös sekä kielellisellä että visuaalisella toistolla. Aineistossa on esimerkki, jossa molempien *visuaalistuksen* osien aluissa ensin toistetaan lähes identtinen sanamuoto ja sen jälkeen esitetään tismalleen samoin muotoillut taulukot (LYM e1, s. 76–77). Toisteisilla ilmauksilla luodaan koheesiota myös esimerkiksi niin, että ratkaisun jokainen alakohta muotoillaan ikään kuin samalla sapluunalla (OM e1, s. 88–89). Ratkaisun alakohdassa saatetaan virkkeiden samanlaisuutta korostaa myös niin, että tekstikappaleen jokainen virke aloitetaan omalta riviltään (OM e2, s. 90–91).

Väreillä voidaan Kressin ja van Leeuwenin (2006: 230) mukaan luoda koheesiota, ja tämä näkyy myös aineistossa. Aineistossa luodaankin koheesiota värien ja kirjasimien käytöllä ja taitolla. Samat elementit sijoitetaan aina samoihin kohtiin ja niissä käytetään värejä aina johdonmukaisesti. Valittuja kirjasimia ja niiden kokoja ja värejä käytetään myös koherentisti läpi teosten.

5 Lopuksi

Tässä tutkimuksessa olen analysoinut matematiikan esimerkkitehtävien tekstilajia. Huomion kohteena ovat olleet eri semioottisten resurssien suhteet, tehtävien rakenne sekä se, mitä kaikkea tehtävissä luonnollisella kielellä ja muilla semioottisilla resursseilla tehdään. Ensimmäisessä luvussa esitin kaksi kysymystä, joiden avulla tutkimuksessa pyrittiin saamaan kuvaa esimerkkitehtävien tekstilajista. Kysymykset olivat: 1. Miten luonnollinen kieli, matematiikan symbolimerkinnät ja kuvat rakentavat tekstiä ja sen osia? 2. Miten teksti rakentuu funktionaalisesti, eli miten ja millaista maailmaa tekstissä rakennetaan, millaiset roolit muodostuvat kirjoittajalle ja lukijalle sekä miten itse teksti kulkee ja pysyy kasassa? Summaan seuraavaksi, millaisia havaintoja olen tehnyt, kun olen etsinyt vastauksia näihin kysymyksiin. Lopuksi pohdin mahdollisia aiheita jatkotutkimukselle.

Kuten luvussa 3 havaittiin, matematiikan esimerkkitehtävistä voidaan erottaa erilaisia pakollisia ja valinnaisia yksiköitä ja osia, joissa käytetään yhtä tai useampaa semioottista resurssia. Lukijan ja tekstilajin kannalta tärkein kyseisessä luvussa tehty huomio kuitenkin on, miten valppaana lukijan täytyy olla pystyäkseen seuraamaan, miten tarkoitteiden merkitykset liikkuvat ja laajenevat tekstissä, kun tarkoitteisiin viitataan eri semioottisilla resursseilla. Tekstin merkitys todella rakentuu kaikkien käytettyjen semioottisten resurssien yhteispelinä. Se, miten semioottisia resursseja käytetään tekstissä, on mielestäni yhtä aikaa sekä tekstilajin vahvuus että haaste lukijalle. Lisähaasteen lukijalle tuo se, että matematiikan oppiaineen hierarkkisen luonteen takia tekstissä oletetaan, että lukija tietää monenlaisia matematiikan käsitteitä ja sääntöjä, eikä missään sanota ääneen, mitä kaikkea lukijan oletetaan muistavan.

Tekstissä rakennetaan joko täysin abstraktia maailmaa tai reaalimaailmaa, jossa ei kuitenkaan päde arkikokemuksen mukainen logiikka. Konstruoidun reaalimaailman poikkeavuutta ei silti voi yleistää piiruakaan tätä aineistoa edemmäs, sillä tutkimus on laadullinen ja aineistossa on vain kaksi kontekstitehtävää. On kuitenkin pantava merkille, että kun matematiikan ilmiö sidotaan kontekstiin, on hyvä miettiä konteksti huolellisesti, jos ja kun kontekstilla yritetään sekä edistää opiskelijoiden motivaatiota että täyttää opetussuunnitelman tavoitteita siitä, että opetus lähtee aiheista ja ilmiöistä, jotka kiinnostavat opiskelijoita. Muuten saatetaan päätyä konstruoimaan reaalimaailmasta irrallinen (matematiikan) mielikuvitusmaailma, joka on – kuten internetmeemeissä ja vitsimukeissa lukee – ainoa paikka, jossa joku ostaa 64 vesimelonia eikä kukaan kysy miksi (”Math – The only place where people buy 64 watermelons and no one wonders why”).

Tekstin kirjoittajan rooli on autoritaarinen. Kirjoittajalla on valta käskeä suoraan ja luoda entiteettejä – jopa jumalallisesti käskeä entiteetti eksistoimaan. Entiteettien konstruointivalta liittyy siihen, että entiteetit ovat abstrakteja. Matematiikka voi olla kyllä matemaatikon leikkikenttä, jossa hän voi luoda mitä tahansa, mutta lukijalle ei kenties ole lainkaan selvää, matematiikassa ei ole kyse luonnonilmiöstä vaan ihmisen konstruktiosta. Kirjoittajan valta saattaa siis lukijan tulkinnassa olla suurempi kuin kirjoittajan intentio on ehkä ollut. Kirjoittaja esittää lähes kaiken ehdottomana faktana, ja tekstin kaikkien semioottisten resurssien valinnat tukevat kyseenalaistamattoman totuuden kuvaa. Annettavaa tietoa ei suhteuteta eikä sille anneta alkuperää. Lukijan rooliksi jää alistua käskyihin – tai ainakin osaan niistä – sekä tarkkailla ja yrittää ymmärtää, mitä kirjoittaja tarkoittaa ja mitä tekstissä tapahtuu.

Itse tekstin kulku on hahmotettavissa välillä hankalasti. Se liittynee osin siihen, etteivät yksittäisten semioottisten resurssien teoriat informaationkulusta tunnu sopivan matematiikan tekstiin ja toisaalta siihen, että multisemioottisissa teksteissä ylipäätään yleensä on monia lukureittejä.

Lukureittien moninaisuus liittyy siihen, että tekstissä erotetaan spatiaalisesti eri elementtejä. Osa aineksesta asetetaan siis muita kohosteisempaan osaan. Lehtinen (2017: 13) kritisoi tätä, kun hän arvioi osaa aineiston teoksista. Hänen mielestään matematiikkaa pitäisi kirjoittaa juoksevana tekstinä niin, että kaavat olisivat lauseenjäseninä eivätkä erotettuina luonnollisen kielen tekstiaineksesta (mp.). Tällöin lukureittejä olisi siis vähemmän. Mielestäni tällä tavalla kuitenkin menetettäisiin osa korostuskeinoista. Esimerkiksi kertaamisessa auttaa aina, jos tekstin keskeiset asiat on tavalla tai toisella nostettu salienteiksi. Lukureittien harventaminen ei joka tapauksessa millään tavalla poistaisi suurimpia haasteita, joita tekstissä on lukijalle. Se ei esimerkiksi vähentäisi millään tavalla sitä, miten tarkoitteiden merkitykset laajenevat eri semioottisilla resursseilla.

Lehtisen (2017: 13) propositiota voisi testata esimerkiksi kvasikokeellisella tutkimuksella. Otettaisiin tismalleen sama teksti ja tehtäisiin siitä kaksi versiota: toinen, jossa symboliresurssi on nykyisenkaltaisesti erotettuna luonnollisesta kielestä, ja toinen, jossa symboliresurssi sisällytettäisiin enemmän luonnollisen kielen joukkoon erilaisilla semioottisen adoption ja sekoittumisen keinoilla. Tämän jälkeen voitaisiin testata, onko asian oppimisessa eroja sen perusteella, kumpaa tekstiä lukija on lukenut.

Koska harva fennisti on tähän mennessä tarttunut matematiikan teksteihin, näen edellä mainitun lisäksi monia muita jatkotutkimuksen aiheita. Kerron näistä ajatuksista seuraavaksi. Koska tässä tutkimuksessa on keskitytty pelkkiin esimerkkitehtäviin, näkisin hedelmällisenä tutkia matematiikan oppimateriaaleista koko opetus- eli teoriatekstiä eli kaikkea sitä muuta materiaalin sisältöä, joka on muuta kuin harjoitustehtäviä. Miten matematiikan määritelmät ja teoreemat kytketään esimerkkitehtäviin? Entä arkipäivään? Tunnistan esimerkiksi aineiston teoksista sellaisia jaksoja, joita O’Halloran (2005: 189) ei ole tutkimuksissaan kertonut havainneensa. Sellaisia ovat erilaiset kirjojen ja lukujen alku- ja loppusivut ja -aukeamat, joilla matematiikan teorioita sidotaan reaalimaailmaan.

Lisäksi näin sähköisen ylioppilaskokeen aikana tulisi tutkia myös digitaalisia oppimateriaaleja. SF-MDA antaa työkaluja myös liikkuvan kuvan ja interaktiivisen sisällön tutkimiseen, joten erilaiset vaiheistukset, videot ja appletit tulisi luonnollisesti ottaa myös tarkasteltaviksi.

Taustani vuoksi näkisin mielenkiintoisena myös esimerkiksi sen, miten esimerkkitehtävien ratkaisujen esittäminen eroaa harjoitustehtävien ratkaisuista. Harjoitustehtävien ratkaisuja kun ei hiota niin pitkään kuin esimerkkitehtävien ratkaisuja hiotaan. Harjoitustehtävien ratkaisuja siis sekä lukee että muokkaa harvempi ihminen ennen julkaisua kuin esimerkkitehtävien ratkaisuja. Prosessin erilaisuuden voisi kuvitella näkyvän myös lopputuloksessa tavalla tai toisella.

Myös vertaileva tutkimus olisi mielekästä. Miten esimerkiksi eri ikäluokille suunnatuissa matematiikan oppimateriaaleissa tarkoitteet kytketään toisiinsa, millaisia intersemioottisia metaforia niistä hahmottuisi? Miten eri semioottisten resurssien käyttötarkoitukset ja -tavat muuttuvat eri vuosiluokkien oppimateriaaleissa? Tai vastaavasti ikäluokan sisällä: miten lyhyen ja pitkän matematiikan oppimäärän oppimateriaalit eroavat toisistaan? Kiinnostavia rajauksia siitä olisivat esimerkiksi kohdat, joissa opetettava asiasisältö on (lähes) sama. Semioottisten resurssien distribuutioita eri ikäluokkien oppimateriaaleissa vertaillaan Lehtosen (2018) tutkimuksessa, mutta Lehtonen on jättänyt intersemioottiset ilmiöt pois tarkastelusta.

Intersemioottiset ilmiöt tulisi kuitenkin mielestäni ottaa matemaattisen tekstin tutkimisessa huomioon eikä tarkastella semioottisia resursseja ikään kuin ne olisivat toisistaan irrallisia, sillä tekstin merkitys selvästi rakentuu intersemioottisten ilmiöiden avulla ja kaikkien semioottisten resurssien yhteispelinä.

Aineisto

LYM = ETELÄMÄKI, HILLA – KATRI HIRVONEN – JUSSI NIEMINEN – JARMO PÖSÖ 2016: *Lukion yhteinen matematiikka: MAY1*. Helsinki: Edita.

OM = HALINEN, HANNA – MARKUS HÄHKIÖNIEMI – SATU JUHALA – SAMPSA KURVINEN – SARI LOUHIKALLIO-FOMIN – ERKKI LUOMA-AHO – JUKKA OTTELIN – KATI PARMANEN – TERHI RAITTILA – TOMMI TAURIAINEN – TOMMI TIKKA – SARI VALLINEVA 2016: *Otavan matematiikka: MAY1*. Helsinki: Otava.

YT = EKONEN, MARKKU – SANNA HASSINEN – PAAVO HEISKANEN– KATARIINA HEMMO – PÄIVI KAAKINEN – JORMA TAHVANAINEN – TIMO TASKINEN 2016: *Yhteinen tekijä: lukion matematiikka. 1, Luvut ja lukujonot*. Helsinki: Sanoma Pro.

Lähteet

AHTEE, MAIJA – ERKKI PEHKONEN 2000: *Johdatus matemaattisten aineiden didaktiikkaan*. Helsinki: Edita.

ANTOLA, MIKA 2017: MAOL-MAY-kysely. – *Dimensio* 81 (2) s. 18–19.

BALDRY, ANTHONY – PAUL J. THIBAULT 2006: *Multimodal transcription and text analysis: a multimodal toolkit and coursebook with associated on-line course*. London: Equinox Publishing.

BATEMAN, JOHN 2008: *Multimodality and genre: a foundation for the systematic analysis of multimodal documents*. Hampshire and New York: Palgrave Macmillan.

CHEUNG, LOK MING ERIC 2015: Infographic design for whistleblowing: systemic functional-multimodal discourse analysis (SF-MDA) of interpersonal meanings in an online newspaper infographic on ivory poaching. Saatavilla osoitteesta https://doi.org/10.13140/RG.2.1.3669.7448 (2.5.2019).

EDITA https://www.editapublishing.fi/tuote/lukion-yhteinen-matematiikka (2.5.2019).

EKONOJA, ANTTI 2014: *Oppimateriaalien kehittäminen, hyödyntäminen ja rooli tieto- ja viestintätekniikan opetuksessa*. Jyväskylä studies in computing 193. Jyväskylä: Jyväskylän yliopisto. Saatavilla osoitteesta http://urn.fi/URN:ISBN:978-951-39-5793-3 (2.5.2019).

GEROFSKY, SUSAN 1999: *World problems as genre in mathematics education*. Simon Fraser University. Saatavilla osoitteesta http://www.collectionscanada.gc.ca/obj/s4/f2/dsk1/tape7/PQDD_0027/NQ51864.pdf (2.5.2019).

HALLAMAA, TEEMU 2016: Opetusministeri puolustaa lukioiden valinnaisuutta. https://yle.fi/uutiset/3-8826029 (2.5.2019).

HALLIDAY, M. A. K. 1978: *Language as social semiotic: the social interpretation of language and meaning*. London: Edward Arnold.

——— 1994: *An introduction to functional grammar*. London: Arnold.

HASAN, RUQAIYA 1986 [1985]: The structure of a text. Teoksessa M. A. K. Halliday, Ruqaiya Hasan *Language, context, and text: aspects of language in a socialsemiotic perspective* s. 52–69. Oxford: Oxford University Press.

HEIKKILÄ, ELINA 2006: *Kuvan ja tekstin välissä: kuvateksti uutiskuvan ja lehtijutun elementtinä*. Suomalaisen Kirjallisuuden Seuran toimituksia 1065. Helsinki: Suomalaisen Kirjallisuuden Seura.

HEIKKINEN, VESA – MIKKO LOUNELA 2008: Small corpus, great institution: and an attempt to understand them. Esitelmä seminaarissa The 19th European Systemic Functional Linguistics Conference and Workshop. Saatavilla osoitteesta https://dx.doi.org/10.22028/D291-26713 (2.5.2019).

HEINONEN, JUHA-PEKKA 2005: *Opetussuunnitelmat vai oppimateriaalit: peruskoulun opettajien käsityksiä opetussuunnitelmien ja oppimateriaalien merkityksestä opetuksessa*. Soveltavan kasvatustieteen laitos / Tutkimuksia 257. Helsinki: Helsingin yliopisto. Saatavilla osoitteesta http://urn.fi/URN:ISBN:952-10-1995-6 (2.5.2019).

HIIDENMAA, PIRJO 2015: Oppikirjojen tutkimus. Teoksessa Helena Ruuska, Markku Löytönen, Anne Rutanen (toim.) *Laatua!: oppimateriaalit muuttuvassa tietoympäristössä* s. 27–39. Helsinki: Suomen tietokirjailijat ry. Saatavilla osoitteesta https://www.suomentietokirjailijat.fi/media/laatua_oppimateriaalit_2015_korjattu_web.pdf (2.5.2019).

HÄKKINEN, KAISA 2002: *Suomalaisen oppikirjan vaiheita*. Helsinki: Suomen tietokirjailijat ry.

JOUTSENLAHTI, JORMA 2009: Matematiikan kielentäminen kirjallisessa työssä. Teoksessa Raimo Kaasila (toim.) *Matematiikan ja luonnontieteiden opetuksen tutkimuspäivät Rovaniemellä 7.–8.11.2008* s. 71–86. Lapin yliopiston kasvatustieteellisiä raportteja 9. Rovaniemi: Lapin yliopisto. Saatavilla osoitteesta https://www.researchgate.net/publication/255960239 (2.5.2019).

——— 2010: Matematiikan kirjallinen kielentäminen lukiomatematiikassa. Teoksessa Mervi Asikainen, Pekka E. Hirvonen, Kari Sormunen (toim.) *Ajankohtaista matemaattisten aineiden opetuksen ja oppimisen tutkimuksessa: matematiikan ja luonnontieteiden opetuksen tutkimuspäivät Joensuussa 22.-23.10.2009* s. 3–15. Publications of the University of Eastern Finland. Reports and Studies in Education, Humanities, and Theology 1. Joensuu: University of Eastern Finland. Saatavilla osoitteesta http://urn.fi/URN:ISBN:978-952-61-0266-5 (3.5.2019).

JOUTSENLAHTI, JORMA – JORMA VAINIONPÄÄ 2010: Oppimateriaali matematiikan opetuksessa ja osaamisessa. Teoksessa Eero K. Niemi, Jari Metsämuuronen (toim.) *Miten matematiikan taidot kehittyvät?: matematiikan oppimistulokset peruskoulun viidennen vuosiluokan jälkeen vuonna 2008* s. 137–148. Helsinki: Opetushallitus. Saatavilla osoitteesta https://www.oph.fi/download/126919_Miten_matematiikan_taidot_kehittyvat.pdf (2.5.2019).

JOUTSENLAHTI, JORMA – KAISU RÄTTYÄ 2015: Kielentämisen käsite ainedidaktisissa tutkimuksissa. Teoksessa Merja Kauppinen, Matti Rautiainen, Mirja Tarnanen (toim.) *Rajaton tulevaisuus: kohti kokonaisvaltaista oppimista: ainedidaktiikan symposium Jyväskylässä 13.–14.2.2014* s. 45–61. Suomen ainedidaktisen tutkimusseuran julkaisuja, Ainedidaktisia tutkimuksia 8. Helsinki: Suomen ainedidaktinen tutkimusseura. Saatavilla osoitteesta http://hdl.handle.net/10138/153212 (2.5.2019).

JOUTSENLAHTI, JORMA – PÄIVI PERKKILÄ – TIMO TOSSAVAINEN 2017: Näytteitä murtoluvun käsitteestä eri aikakausien oppikirjoissa. – *Proceedings of the annual FMSERA symposium 2016* s. 99–109. Saatavilla osoitteesta https://journal.fi/fmsera/article/view/60904/27045 (2.5.2019).

JOUTSENLAHTI, JORMA – TIMO TOSSAVAINEN 2018: Matemaattisen ajattelun kielentäminen ja siihen ohjaaminen koulussa. Teoksessa Jorma Joutsenlahti, Harry Silfverberg, Pekka Räsänen (toim.) *Matematiikan opetus ja oppiminen* s. 410–431 Jyväskylä: Niilo Mäki Instituutti. Saatavilla osoitteesta https://www.researchgate.net/publication/328886389_Matemaattisen_ajattelun_kielentaminen_ja_siihen_ohjaaminen_koulussa (2.5.2019).

KARKKULAINEN, LAURA 2017: Lukion opiskelijoiden ja opettajien kokemuksia MAY1-kurssista. Pro gradu -tutkielma. Itä-Suomen yliopiston fysiikan ja matematiikan laitos. Saatavilla osoitteesta http://urn.fi/urn:nbn:fi:uef-20170935 (2.5.2019).

KARVONEN, PIRJO 1995: *Oppikirjateksti toimintana*. Suomalaisen kirjallisuuden seuran toimituksia 632. Helsinki: SKS.

KARVONEN, ULLA – LIISA TAINIO – SARA ROUTARINNE 2017: Oppia kirjoista. Systemaattinen katsaus suomalaisten perusopetuksen oppimateriaalien tutkimukseen. – *Kasvatus ja aika* 11 (4) s. 39–57. Saatavilla osoitteesta https://journal.fi/kasvatusjaaika/article/view/68764 (2.5.2019).

KELOMÄKI, TAPANI 1997: *Ekvatiivilause*. Suomalaisen Kirjallisuuden Seuran toimituksia 691. Helsinki: Suomalaisen Kirjallisuuden Seura.

Kielitoimiston oikeinkirjoitusopas, 2007. 2., korjattu painos. Kotimaisten kielten tutkimuskeskuksen julkaisuja 147. Päätoimittaja Salli Kankaanpää. Helsinki: Kotimaisten kielten tutkimuskeskus.

KOK, KUM CHIEW ARTHUR 2004: Multisemiotic mediation in hypertext. Teoksessa Kay O'Halloran (toim.) *Multimodal discourse analysis: systemic-functional perspectives* s. 131–159. London: Continuum.

KRESS, GUNTHER – THEO VAN LEEUWEN 2006: *Reading images: the grammar of visual design*. 2., uudistettu painos. London: Taylor & Francis.

LAURI, LEEVI 2014: Lyhyen matematiikan ylioppilaskokeen sanallisten tehtävien tekstilaji. Pro gradu -tutkielma. Helsingin yliopiston suomen kielen, suomalais-ugrilaisten ja pohjoismaisten kielten ja kirjallisuuksien laitos. Saatavilla osoitteesta http://urn.fi/URN:NBN:fi-fe2014062629531 (2.5.2019).

LEHTINEN, MATTI 2017: Kirja-arvio: Lukion yhteisen matematiikan kurssin oppikirjoja. – *Solmu* 3/2017 s. 12–14. Saatavilla osoitteesta https://matematiikkalehtisolmu.fi/2017/3/oppikirjat.pdf (2.5.2019).

LEHTONEN, DARANEE 2018: Multimodaalisuus 1. ja 4. luokan suomalaisissa matematiikan oppikirjoissa. – *LUMAT: International Journal on Math, Science and Technology Education* 6 (1) s. 129–164. Saatavilla osoitteesta https://doi.org/10.31129/LUMAT.6.1.341 (2.5.2019).

LEINONEN, ANNI – ANNI TURKKI – SARI HARMOINEN 2017: Onnistunko vai en? – Lukiolaisten kokemuksia MAY1-kurssista. – *Dimensio* 81 (4) s. 38–41.

LEMKE, JAY 1998: Multiplying meaning: visual and verbal semiotics in scientific text. Teoksessa J. R. Martin, Robert Veel (toim.) *Reading science: critical and functional perspectives on discourse of science* s. 87–113. London: Routledge. Saatavilla osoitteesta https://www.researchgate.net/publication/246905867_Multiplying_meaning_Visual_and_verbal_semiotics_in_scientific_text (2.5.2019).

——— 2003: Mathematics in the middle: measure, picture, gesture, sign, and word. Teoksessa Myrdene Anderson, Adalira Sáenz-Ludlow, Shea Zellweger, Victor V. Cifarelli (toim.) *Educational perspectives on mathematics as semiosis: from thinking to interpreting to knowing* s. 215–234. New York: Legas. Saatavilla osoitteesta https://www.researchgate.net/publication/267853726_Mathematics_in_the_middle_Measure_picture_gesture_sign_and_word (2.5.2019).

LIM, FEI VICTOR 2004: Developing an integrative multi-semiotic model. Teoksessa Kay O'Halloran (toim.) *Multimodal discourse analysis* s. 220–246. London: Continuum. Saatavilla osoitteesta https://www.researchgate.net/publication/306008813_Developing_an_Integrative_Multi-semiotic_Model (2.5.2019).

——— 2011: *A systemic functional multimodal discourse analysis approach to pedagogic discourse*. National University of Singapore. Saatavilla osoitteesta http://scholarbank.nus.edu.sg/handle/10635/29928 (2.5.2019).

LINDGRÉN, JOSEFIN 2018: Lukujonot, summat ja sarjat lukion opetussuunnitelmamuutoksessa. Pro gradu -tutkielma. Tampereen yliopiston luonnontieteiden tiedekunta. Saatavilla osoitteesta http://urn.fi/URN:NBN:fi:uta-201805311880 (2.5.2019).

LIU, XIQIN 2017: Multimodal exemplification: the expansion of meaning in electronic dictionaries. – *Lexicos* 27 (1) s. 287–309. Saatavilla osoitteesta https://doi.org/10.5788/27-1-1404 (2.5.2019).

LOPS 2003 = *Lukion opetussuunnitelman perusteet 2003*. Helsinki: Opetushallitus. Saatavilla osoitteesta https://www.oph.fi/download/47345_lukion_opetussuunnitelman_perusteet_2003.pdf (2.5.2019).

LOPS 2015 = *Lukion opetussuunnitelman perusteet 2015*. Määräykset ja ohjeet 2015:48. Helsinki: Opetushallitus. Saatavilla osoitteesta https://www.oph.fi/download/172124_lukion_opetussuunnitelman_perusteet_2015.pdf (2.5.2019).

MAKKONEN-CRAIG, HENNA 2005: *Toimittajan läsnäolo sanomalehtitekstissä: näkökulmia suomen kielen dialogisiin passiivilauseisiin*. Suomalaisen Kirjallisuuden Seuran toimituksia 1026. Helsinki: Suomalaisen Kirjallisuuden Seura.

MAOL 2013 = KAIRINEN, KIRSI (toim.): *MAOL taulukot: matematiikka, fysiikka, kemia*. Uudistettu laitos. Helsingissä: Otava.

MARTIN, J. R. 1992: *English text: system and structure*. Philadelphia: John Benjamins Publishing.

MEANEY, TAMSIN 2004: Mathematics as text. Teoksessa Anna Chronaki, Iben Maj Christiansen (toim.) *Challenging perspectives on mathematics classroom communication* s. 109–144. Greenwich: Information Age Publishing.

MIKKILÄ-ERDMANN, MIRJAMAIJA – ERKKI OLKINUORA – EIJA MATTILA 1999: Muuttuneet käsitykset oppimisesta ja opettamisesta – haaste oppikirjoille. – *Kasvatus* 30 (5) s. 436–449.

MIKKONEN, KAI 2012: Multimodaalisuus ja laji. Teoksessa Vesa Heikkinen, Eero Voutilainen, Petri Lauerma, Ulla Tiililä, Mikko Lounela (toim.) *Genreanalyysi: tekstilajitutkimuksen käsikirja* s. 296–308. Kotimaisten kielten keskuksen julkaisuja 169. Helsinki: Gaudeamus.

MORGAN, CANDIA 2006: What does social semiotics have to offer mathematics education research? – *Educational Studies in Mathematics* 61 (1/2) s. 219–245.

NIEMI, EERO K. 2008: *Matematiikan oppimistulosten kansallinen arviointi 6. vuosiluokalla vuonna 2007*. Helsinki: Opetushallitus. Saatavilla osoitteesta http://www.opetushallitus.fi/download/46754_matematiikka_6luokka_2007.pdf (2.5.2019).

NIKULA, SILJA 2012: *Paikan henki: matkailijan mielikuvasta graafiseksi kuvaksi*. Acta Universitatis Lapponiensis 228. Rovaniemi: Lapin yliopisto.

O'HALLORAN, KAY 2005: *Mathematical discourse: language, symbolism and visual images*. London, New York: Continuum.

——— 2007a: Mathematical and scientific forms of knowledge: a systemic functional multimodal grammatical approach. Teoksessa Frances Christie, J. R. Martin (toim.) *Language, knowledge and pedagogy: functional linguistic and sociological perspectives* s. 205–236. London: Continuum.

——— 2007b: Systemic functional multimodal discourse analysis (SF-MDA) approach to mathematics, grammar and literacy. Teoksessa Anne McCabe, Mick O'Donnell, Rachel Whittaker (toim.) *Advances in language and education* s. 75–100. London: Continuum.

——— 2008a: Inter-semiotic expansion of experiential meaning: hierarchical scales and metaphor in mathematics discourse. Teoksessa Carys Jones, Eija Ventola (toim.) *From language to multimodality: new developments in the study of ideational meaning* s. 231–254. London: Equinox Publishing.

——— 2008b: Systemic functional-multimodal discourse analysis (SF-MDA): constructing ideational meaning using language and visual imagery. – *Visual Communication* 7 (4) s. 443–475.

——— 2011: Multimodal discourse analysis. Teoksessa Ken Hyland, Brian Paltridge (toim.) *Bloomsbury companion to discourse analysis* s. 120–137. Bloomsbury Companions. London and New York: Continuum International Publishing Group.

——— 2015a: The language of learning mathematics: a multimodal perspective. – *The Journal of Mathematical Behaviour* 40 s. 63–74.

——— 2015b: Mathematics as multimodal semiosis. Teoksessa Ernest Davis, Philip J. Davis (toim.) *Mathematics, substance and surmise* s. 287–303. Switzerland: Springer.

O'HALLORAN, KAY – VICTOR LIM FEI 2014: Systemic functional multimodal discourse analysis. Teoksessa Sigrid Norris, Carmen Daniela Maier (toim.) *Interactions, images and texts: a reader in multimodality* s. 137–154. Boston: De Gruyter Mouton.

OPM 2013 = *Tulevaisuuden lukio: valtakunnalliset tavoitteet ja tuntijako*. Opetus- ja kulttuuriministeriön työryhmämuistioita ja selvityksiä 2013:14. Helsinki: Opetus- ja kulttuuriministeriö. Saatavilla osoitteesta http://urn.fi/URN:ISBN:978-952-263-246-3 (2.5.2019).

O'TOOLE, MICHAEL 1994: *The language of displayed art*. London: Leicester University Press.

PELTONEN, ANNA 2017: Painetut oppikirjat vai sähköinen oppimateriaali: oppimateriaalin vaikutus opiskelijoiden oppimiskokemukseen MAY-kurssilla. Pro gradu -tutkielma. Helsingin yliopiston matematiikan ja tilastotieteen laitos. Saatavilla osoitteesta http://urn.fi/URN:NBN:fi-fe2017112251700 (2.5.2019).

PERKKILÄ, PÄIVI – JORMA JOUTSENLAHTI – VESA-MATTI SARENIUS 2018: Peruskoulun matematiikan oppikirjat osana oppimateriaalitutkimusta. Teoksessa Jorma Joutsenlahti, Harry Silfverberg, Pekka Räsänen (toim.) *Matematiikan opetus ja oppiminen* s. 344–364. Niilo Mäki Instituutti.

PORTAANKORVA-KOIVISTO, PÄIVI – LASSE ERONEN – SIRKKU KUPIAINEN – MARKKU S. HANNULA 2018: Lukion ensimmäinen yhteinen matematiikan kurssi: mielekästä ja merkityksellistä? – *FMSERA Journal* 2 (1) s. 57–66. Saatavilla osoitteesta https://journal.fi/fmsera/article/view/69899 (2.5.2019).

REKU, JUHANI 2004: a+b=b+a: matematiikan oppikirjan semioottiset koodit ja niiden työnjako käsitteiden määrittelyssä. Pro gradu -tutkielma. Helsingin yliopiston suomen kielen laitos.

RIIHO, KATARIINA 2018: Siirtymä MAY1-kurssilta lyhyen tai pitkän matematiikan 2. kurssille lukiossa. Pro gradu -tutkielma. Helsingin yliopiston matematiikan ja tilastotieteen laitos. Saatavilla osoitteesta http://urn.fi/URN:NBN:fi:hulib-201804131665 (2.5.2019).

ROTH, KATHLEEN – CHARLES ANDERSON – EDWARD SMITH 1987: Curriculum materials, teacher talk and student learning: case studies in fifth grade science teaching. – *Journal of Curriculum Studies* 19 (6) s. 527–548.

ROYCE, TERRY 1998: Synergy on the page: exploring *intersemiotic complementarity* in page-based multimodal text. – *JASFL Occasional Papers* 1 (1) s. 25–49. Saatavilla osoitteesta https://www.academia.edu/744676/Synergy_on_the_page_Exploring_intersemiotic_complementarity_in_page-based_multimodal_text (2.5.2019).

RUUSKA, HELENA 2014: Ei oppikirja ojaan jouda. Teoksessa Tommi Inkinen, Markku Löytönen, Anne Rutanen (toim.) *Kirja muuttuvassa tietoympäristössä*, s. 77–87. Helsinki: Suomen tietokirjailijat ry. Saatavilla osoitteesta https://www.suomentietokirjailijat.fi/media/kirja-muuttuvassa-tietoymp_169x224_final.pdf (2.5.2019).

——— 2015: Mitä oppikirjailija osaa? Teoksessa Helena Ruuska, Markku Löytönen, Anne Rutanen (toim.) *Laatua!: oppimateriaalit muuttuvassa tietoympäristössä* s. 17–25. Helsinki: Suomen tietokirjailijat ry. Saatavilla osoitteesta https://www.suomentietokirjailijat.fi/media/laatua_oppimateriaalit_2015_korjattu_web.pdf (2.5.2019).

SANOMA PRO https://www.sanomapro.fi/sarjat/yhteinen-tekija/ (2.5.2019).

SHORE, SUSANNA 2008: Lauseiden tekstuaalisesta jäsennyksestä. – *Virittäjä* 112 (1) s. 24–65. Saatavilla osoitteesta https://journal.fi/virittaja/article/view/40639/10065 (3.5.2019).

——— 2012: Systeemis-funktionaalinen teoria tekstien tutkimisessa. Teoksessa Vesa Heikkinen, Eero Voutilainen, Petri Lauerma, Ulla Tiililä, Mikko Lounela (toim.) *Genreanalyysi: tekstilajitutkimuksen käsikirja* s. 158–185. Kotimaisten kielten keskuksen julkaisuja 169. Helsinki: Gaudeamus.

SILFVERBERG, HARRY – PÄIVI PORTAANKORVA-KOIVISTO – SARI YRJÄNÄINEN 2005: Matematiikka kielenä ja kielikasvatuksena. Teoksessa Lasse Jalonen, Tapio Keranto, Kari Kaila (toim.) *Matematiikan ja luonnontieteiden opetuksen tutkimuspäivät Oulussa 25.–26.11.2004: matemaattisten aineiden opettajan taitotieto – haaste vai mahdollisuus?* s. 149–165. Acta Universitatis Ouluensis. E, Scientiae rerum socialium 80. Oulu: Oulun yliopisto. Saatavilla osoitteesta http://urn.fi/urn:isbn:9514278879 (2.5.2019).

SWALES, JOHN 1990: *Genre analysis: english in academic and research setting*. Cambridge: Cambridge University Press.

TOSSAVAINEN, TIMO 2005: Matematiikka ja kieli. – *Tieteessä tapahtuu* 4/2005 s. 33–36.

——— 2007: Matematiikan kieliaspekti ja matematiikkakuva. Teoksessa Anneli Niikko, Ismo Pellikka, Erkki Savolainen (toim.) *Oppimista, opetusta, monitieteisyyttä: kirjoituksia Kuninkaankartanonmäeltä* s. 233–243. Savonlinna: Joensuun yliopisto, Savonlinnan opettajankoulutuslaitos. Saatavilla osoitteesta http://sokl.uef.fi/verkkojulkaisut/monitiet/pdf/tossavainen.pdf (3.5.2019).

——— 2015: Uutta ja vanhaa lukion matematiikan opetuksessa. Teoksessa Helena Ruuska, Markku Löytönen, Anne Rutanen (toim.) *Laatua!: oppimateriaalit muuttuvassa tietoympäristössä* s. 129–147. Helsinki: Suomen tietokirjailijat ry. Saatavilla osoitteesta https://www.suomentietokirjailijat.fi/media/laatua_oppimateriaalit_2015_korjattu_web.pdf (2.5.2019).

TOSSAVAINEN, TIMO – JORMA JOUTSENLAHTI – MATTI LEHTINEN – JORMA MERIKOSKI 2017: Merkittäviä suomalaisia matematiikan oppikirjoja ja -kirjailijoita. Teoksessa Pirjo Hiidenmaa, Markku Löytönen, Helena Ruuska (toim.) *Oppikirja Suomea rakentamassa* s. 217–246. Helsinki: Suomen tietokirjailijat ry.

TURPEINEN, HENNALEENA 2017: ”Kuinka monta prosenttia?”: matematiikan sanalliset tehtävät ja niiden kysymykset. Pro gradu -tutkielma. Helsingin yliopiston suomen kielen, suomalais-ugrilaisten ja pohjoismaisten kielten ja kirjallisuuksien laitos. Saatavilla osoitteesta http://urn.fi/URN:NBN:fi:hulib-201711025610 (2.5.2019).

TÖRNROOS, JUKKA 2004: *Opetussuunnitelma, oppikirjat ja oppimistulokset: seitsemännen luokan matematiikan osaaminen arvioitavana*. Koulutuksen tutkimuslaitos / Tutkimuksia 13. Jyväskylä: Jyväskylän yliopisto. Saatavilla osoitteesta http://urn.fi/URN:ISBN:978-951-39-3226-8 (2.5.2019).

UUSIKYLÄ, KARI – PÄIVI ATJONEN 2005: *Didaktiikan perusteet*. 3., uudistettu painos. Helsinki: WSOY.

VISK = HAKULINEN, AULI – MARIA VILKUNA – RIITTA KORHONEN – VESA KOIVISTO – TARJA RIITTA HEINONEN – IRJA ALHO 2008 [2004, 2005]: Ison suomen kieliopin verkkoversio. Verkkoversion vastaava toimittaja Maria Vilkuna. Kotimaisten kielten tutkimuskeskuksen verkkojulkaisuja 5. Helsinki: Kotimaisten kielten tutkimuskeskus. Saatavilla osoitteesta http://scripta.kotus.fi/visk (3.5.2019). URN:ISBN:978-952-5446-35-7

WIGNELL, PETER – SABINE TAN – KAY O'HALLORAN 2017: Violent extremism and iconisation: commanding good and forbidding evil? – *Critical Discourse Studies* 14 (1) s. 1–22.

Liite: Aineiston esimerkkitehtävät ja niiden yksiköt ja osat

Lukujono

ESIMERKKI 1 Fysioterapeutti antaa toipilaalle kaksi eri treeniohjelmaa.

- Ensimmäisessä ohjelmassa kävelylenkin pituus kasvaa joka päivä 50 metrillä.
- Toisessa ohjelmassa kävelylenkin pituus kasvaa päivittäin 20 %.

Kuinka pitkän lenkin toipilas tekee viitenä ensimmäisenä päivänä ja 20. päivänä kummankin ohjelman mukaan, kun hän jaksaa kävellä ensimmäisenä päivänä 150 m?

Ratkaisu Kävelylenkkien pituudet ensimmäisen ohjelman mukaan:

Treeniohjelman päivä	Kävelylenkin pituus
1. päivä	150 (m)
2. päivä	$150 + 50 = 200$ (m)
3. päivä	$150 + 2 \cdot 50 = 250$ (m)
4. päivä	$150 + 3 \cdot 50 = 300$ (m)
5. päivä	$150 + 4 \cdot 50 = 350$ (m)
20. päivä	$150 + 19 \cdot 50 = 1\,100$ (m)

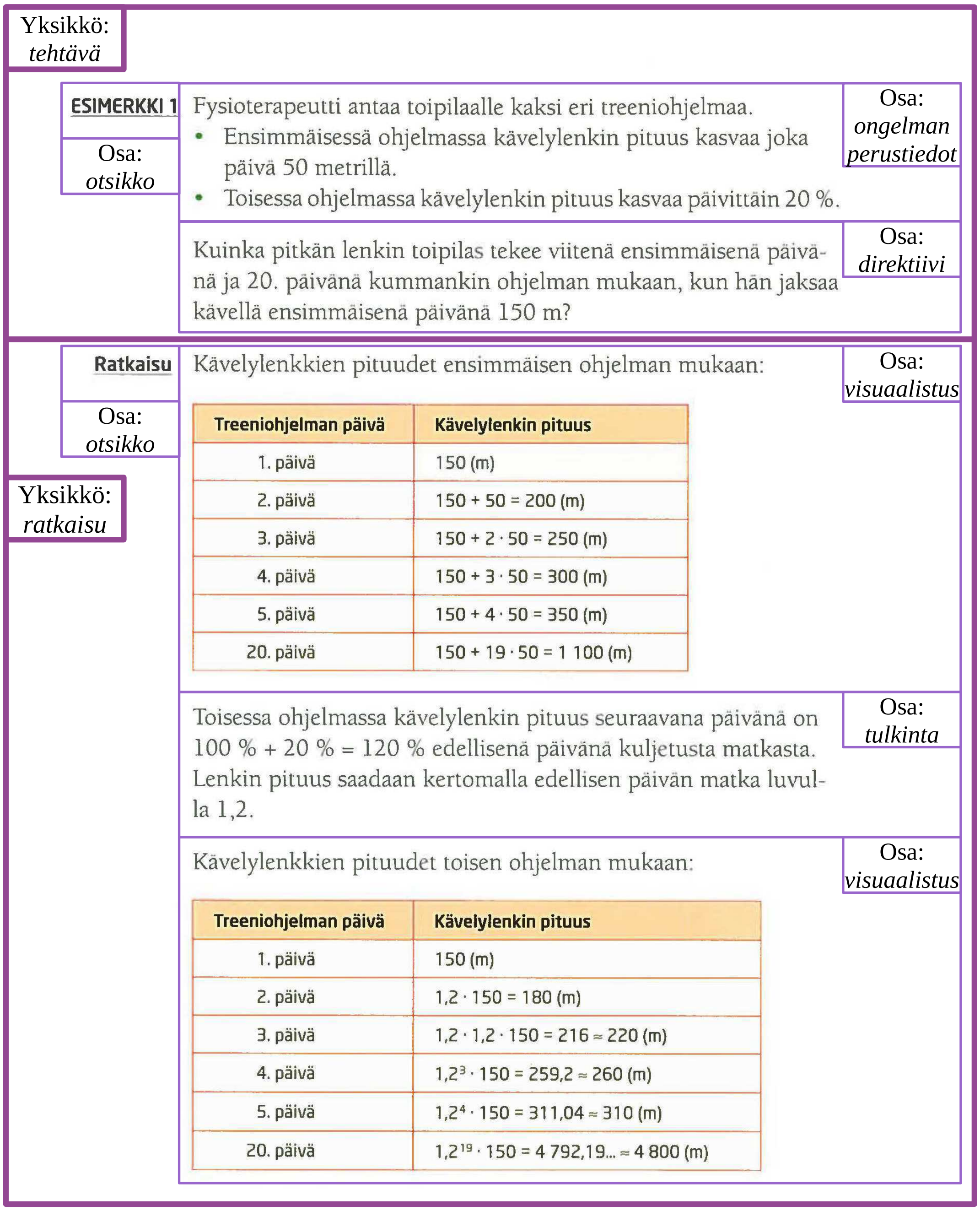
Toisessa ohjelmassa kävelylenkin pituus seuraavana päivänä on 100 % + 20 % = 120 % edellisenä päivänä kuljetusta matkasta. Lenkin pituus saadaan kertomalla edellisen päivän matka luvulla 1,2.

Kävelylenkkien pituudet toisen ohjelman mukaan:

Treeniohjelman päivä	Kävelylenkin pituus
1. päivä	150 (m)
2. päivä	$1{,}2 \cdot 150 = 180$ (m)
3. päivä	$1{,}2 \cdot 1{,}2 \cdot 150 = 216 \approx 220$ (m)
4. päivä	$1{,}2^3 \cdot 150 = 259{,}2 \approx 260$ (m)
5. päivä	$1{,}2^4 \cdot 150 = 311{,}04 \approx 310$ (m)
20. päivä	$1{,}2^{19} \cdot 150 = 4\,792{,}19... \approx 4\,800$ (m)

Lukujono 99

Kuva 1. *Lukion yhteisen matematiikan* esimerkki 1 (s. 99) kontekstissaan.



Yksikkö: *tehtävä*

ESIMERKKI 1

Osa: *otsikko*

Fysioterapeutti antaa toipilaalle kaksi eri treeniohjelmaa.

- Ensimmäisessä ohjelmassa kävelylenkin pituus kasvaa joka päivä 50 metrillä.
- Toisessa ohjelmassa kävelylenkin pituus kasvaa päivittäin 20 %.

Osa: *ongelman perustiedot*

Kuinka pitkän lenkin toipilas tekee viitenä ensimmäisenä päivänä ja 20. päivänä kummankin ohjelman mukaan, kun hän jaksaa kävellä ensimmäisenä päivänä 150 m?

Osa: *direktiivi*

Ratkaisu

Osa: *otsikko*

Yksikkö: *ratkaisu*

Kävelylenkkien pituudet ensimmäisen ohjelman mukaan:

Osa: *visuaalistus*

Treeniohjelman päivä	Kävelylenkin pituus
1. päivä	150 (m)
2. päivä	$150 + 50 = 200$ (m)
3. päivä	$150 + 2 \cdot 50 = 250$ (m)
4. päivä	$150 + 3 \cdot 50 = 300$ (m)
5. päivä	$150 + 4 \cdot 50 = 350$ (m)
20. päivä	$150 + 19 \cdot 50 = 1\,100$ (m)

Toisessa ohjelmassa kävelylenkin pituus seuraavana päivänä on 100 % + 20 % = 120 % edellisenä päivänä kuljetusta matkasta. Lenkin pituus saadaan kertomalla edellisen päivän matka luvulla 1,2.

Osa: *tulkinta*

Kävelylenkkien pituudet toisen ohjelman mukaan:

Osa: *visuaalistus*

Treeniohjelman päivä	Kävelylenkin pituus
1. päivä	150 (m)
2. päivä	$1{,}2 \cdot 150 = 180$ (m)
3. päivä	$1{,}2 \cdot 1{,}2 \cdot 150 = 216 \approx 220$ (m)
4. päivä	$1{,}2^3 \cdot 150 = 259{,}2 \approx 260$ (m)
5. päivä	$1{,}2^4 \cdot 150 = 311{,}04 \approx 310$ (m)
20. päivä	$1{,}2^{19} \cdot 150 = 4\,792{,}19... \approx 4\,800$ (m)

Kaavio 1. *Lukion yhteisen matematiikan* esimerkin 1 (s. 99) yksiköt ja osat.

Lukujono ja sen jäsenet

Lukujono määräytyy tietyn säännön mukaan. Lukuja, jotka muodostavat jonon, sanotaan joko **jonon jäseniksi** tai **termeiksi**. Lukujono voi olla päättymätön tai päättyvä.

Lukujonon jäsenestä käytetään yleensä merkintää a_n tai b_n. Merkinnässä alaindeksi n ilmoittaa, kuinka monennesta jonon jäsenestä on kyse, ellei toisin ole mainittu.

ESIMERKKI 2 Määritä lukujonon viisi ensimmäistä jäsentä ja 19. jäsen, kun

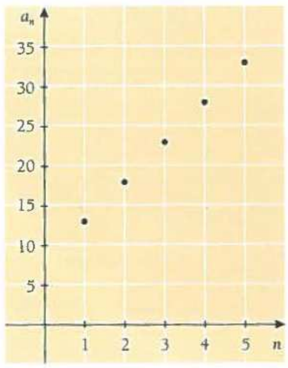
a) $a_n = 5n + 8$

b) $b_n = \dfrac{6 \cdot (-1)^n}{n}$.

Havainnollista lukujonon alkua koordinaatistossa.

Ratkaisu a)

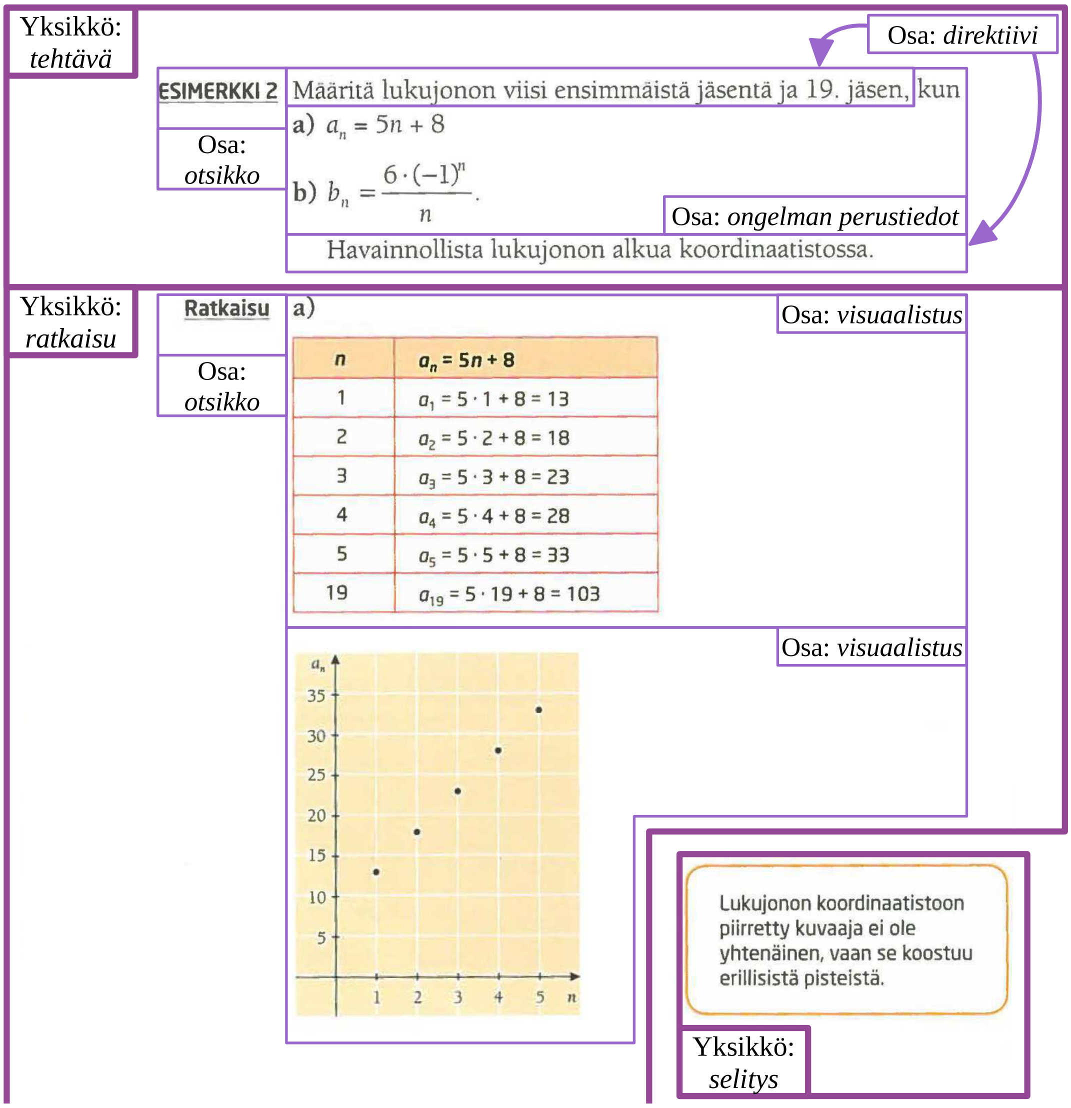
n	$a_n = 5n + 8$
1	$a_1 = 5 \cdot 1 + 8 = 13$
2	$a_2 = 5 \cdot 2 + 8 = 18$
3	$a_3 = 5 \cdot 3 + 8 = 23$
4	$a_4 = 5 \cdot 4 + 8 = 28$
5	$a_5 = 5 \cdot 5 + 8 = 33$
19	$a_{19} = 5 \cdot 19 + 8 = 103$



Lukujonon koordinaatistoon piirretty kuvaaja ei ole yhtenäinen, vaan se koostuu erillisistä pisteistä.

100 Lukujono

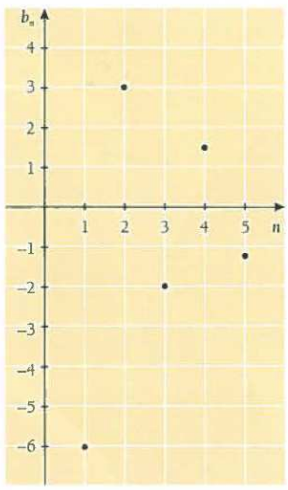
Kuva 2. *Lukion yhteisen matematiikan* esimerkin 2 alkupuoli (s. 100) kontekstissaan.



Kaavio 2. *Lukion yhteisen matematiikan* esimerkin 2 alkupuolen (s. 100) yksiköt ja osat.

b)

n	$b_n = \frac{6 \cdot (-1)^n}{n}$
1	$b_1 = \frac{6 \cdot (-1)^1}{1} = \frac{6 \cdot (-1)}{1} = \frac{-6}{1} = -6$
2	$b_2 = \frac{6 \cdot (-1)^2}{2} = \frac{6 \cdot 1}{2} = \frac{6}{2} = 3$
3	$b_3 = \frac{6 \cdot (-1)^3}{3} = \frac{6 \cdot (-1)}{3} = \frac{-6}{3} = -2$
4	$b_4 = \frac{6 \cdot (-1)^4}{4} = \frac{6 \cdot 1}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$
5	$b_5 = \frac{6 \cdot (-1)^5}{5} = \frac{6 \cdot (-1)}{5} = -\frac{6}{5} = -1\frac{1}{5}$
19	$b_{19} = \frac{6 \cdot (-1)^{19}}{19} = \frac{6 \cdot (-1)}{19} = -\frac{6}{19}$



Lukujono 101

Kuva 3. *Lukion yhteisen matematiikan* esimerkin 2 loppupuoli (s. 101) kontekstissaan.

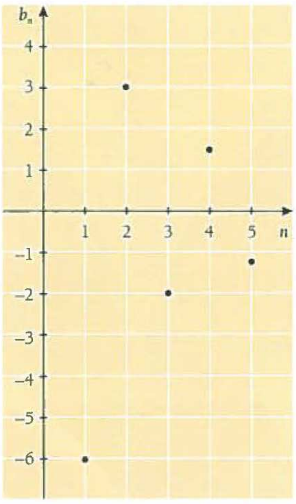
Yksikkö: *ratkaisu*

b)

Osa: *visuaalistus*

n	$b_n = \frac{6 \cdot (-1)^n}{n}$
1	$b_1 = \frac{6 \cdot (-1)^1}{1} = \frac{6 \cdot (-1)}{1} = \frac{-6}{1} = -6$
2	$b_2 = \frac{6 \cdot (-1)^2}{2} = \frac{6 \cdot 1}{2} = \frac{6}{2} = 3$
3	$b_3 = \frac{6 \cdot (-1)^3}{3} = \frac{6 \cdot (-1)}{3} = \frac{-6}{3} = -2$
4	$b_4 = \frac{6 \cdot (-1)^4}{4} = \frac{6 \cdot 1}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$
5	$b_5 = \frac{6 \cdot (-1)^5}{5} = \frac{6 \cdot (-1)}{5} = -\frac{6}{5} = -1\frac{1}{5}$
19	$b_{19} = \frac{6 \cdot (-1)^{19}}{19} = \frac{6 \cdot (-1)}{19} = -\frac{6}{19}$

Osa: *visuaalistus*



Kaavio 3. *Lukion yhteisen matematiikan* esimerkin 2 loppupuolen (s. 101) yksiköt ja osat.

ESIMERKKI 3 Kirjoita lukujonon yleisen jäsenen lauseke, kun jonon muodostavat

a) luvun viisi monikerrat 5, 10, 15, …

b) murtoluvut $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots$, joissa osoittaja on jäsenen järjestysluku ja nimittäjä saadaan, kun osoittajaan lisätään yksi.

Ratkaisu Lasketaan lisää lukujonon alkupään jäseniä taulukkoon ja päätellään sääntö, jonka avulla jonon yleinen jäsen a_n lasketaan sen järjestysluvun n perusteella.

a)

n	a_n
1	5
2	10
3	15
4	$5 \cdot 4 = 20$
5	$5 \cdot 5 = 25$
n	$5 \cdot n = 5n$

Jonon yleinen jäsen on $a_n = 5n$.

b)

n	b_n
1	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{2}{3}$
3	$\frac{3}{4}$
4	$\frac{4}{4+1} = \frac{4}{5}$
5	$\frac{5}{5+1} = \frac{5}{6}$
n	$\frac{n}{n+1}$

Jonon yleinen jäsen on $b_n = \frac{n}{n+1}$.

Vastaus a) $a_n = 5n$ b) $b_n = \frac{n}{n+1}$

Lukujono 103

Kuva 4. *Lukion yhteisen matematiikan* esimerkki 3 (s. 103) kontekstissaan.

Yksikkö: *tehtävä*

Osa: *direktiivi*

ESIMERKKI 3 Kirjoita lukujonon yleisen jäsenen lauseke, kun jonon muodostavat

Osa: *otsikko*

Osa: *ongelman perustiedot*

a) luvun viisi monikerrat 5, 10, 15, …

b) murtoluvut $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots$, joissa osoittaja on jäsenen järjestysluku ja nimittäjä saadaan, kun osoittajaan lisätään yksi.

Ratkaisu Lasketaan lisää lukujonon alkupään jäseniä taulukkoon ja päätellään sääntö, jonka avulla jonon yleinen jäsen a_n lasketaan sen järjestysluvun n perusteella.

Osa: *otsikko*

Osa: *tulkinta*

Yksikkö: *ratkaisu*

a)

Osa: *visuaalistus*

n	a_n
1	5
2	10
3	15
4	$5 \cdot 4 = 20$
5	$5 \cdot 5 = 25$
n	$5 \cdot n = 5n$

Jonon yleinen jäsen on $a_n = 5n$.

Osa: *tulkinta*

b)

Osa: *visuaalistus*

n	b_n
1	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{2}{3}$
3	$\frac{3}{4}$
4	$\frac{4}{4+1} = \frac{4}{5}$
5	$\frac{5}{5+1} = \frac{5}{6}$
n	$\frac{n}{n+1}$

Jonon yleinen jäsen on $b_n = \frac{n}{n+1}$.

Osa: *tulkinta*

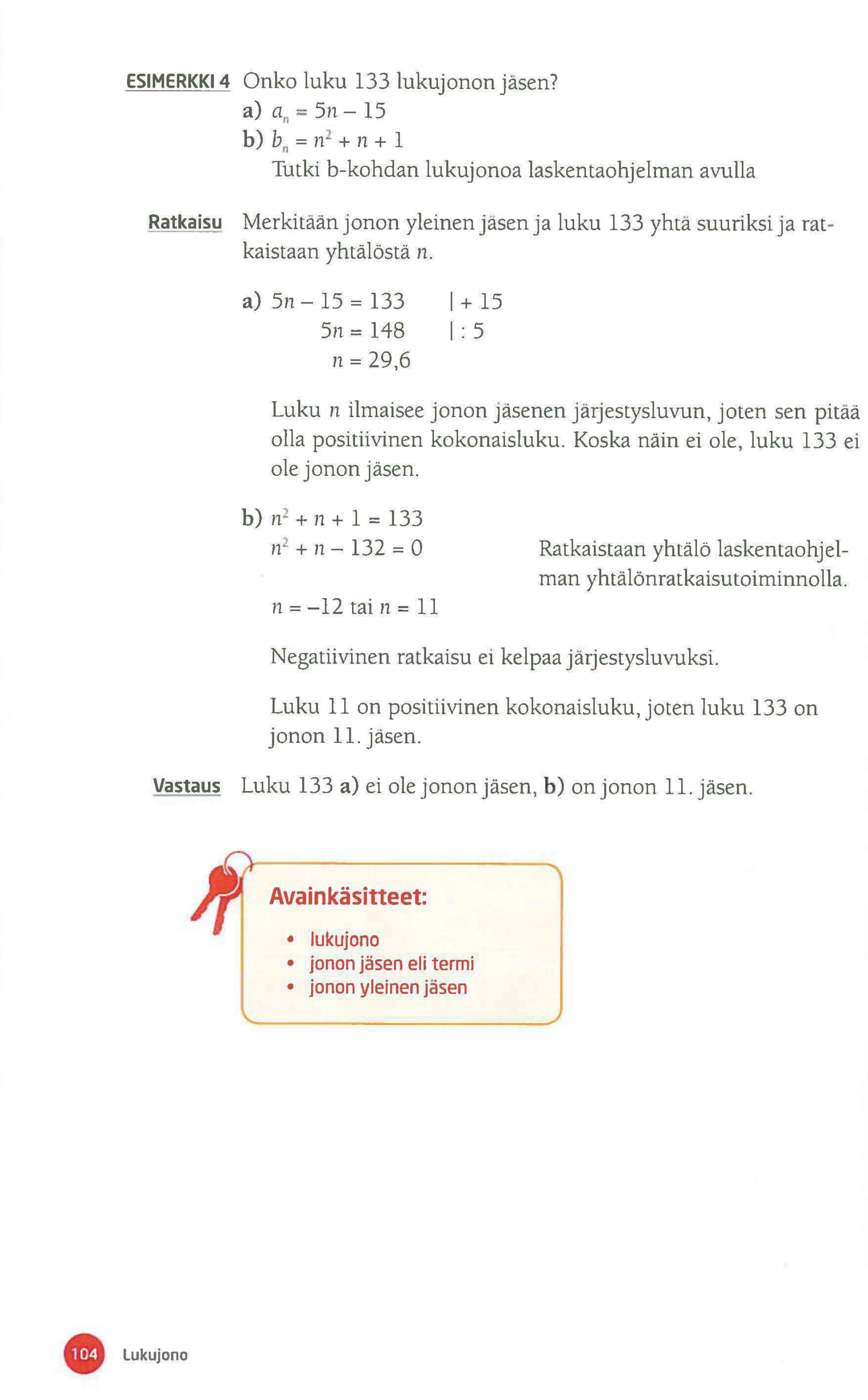
Vastaus a) $a_n = 5n$ b) $b_n = \frac{n}{n+1}$

Osa: *otsikko*

Osa: *vastaus*

Yksikkö: *vastaus*

Kaavio 4. *Lukion yhteisen matematiikan* esimerkin 3 (s. 103) yksiköt ja osat.



ESIMERKKI 4 Onko luku 133 lukujonon jäsen?

a) $a_n = 5n - 15$

b) $b_n = n^2 + n + 1$

Tutki b-kohdan lukujonoa laskentaohjelman avulla

Ratkaisu Merkitään jonon yleinen jäsen ja luku 133 yhtä suuriksi ja ratkaistaan yhtälöstä n.

a)
$$
\begin{aligned}
5n - 15 &= 133 && \mid +15 \\
5n &= 148 && \mid :5 \\
n &= 29{,}6
\end{aligned}
$$

Luku n ilmaisee jonon jäsenen järjestysluvun, joten sen pitää olla positiivinen kokonaisluku. Koska näin ei ole, luku 133 ei ole jonon jäsen.

b)
$$
\begin{aligned}
n^2 + n + 1 &= 133 \\
n^2 + n - 132 &= 0
\end{aligned}
$$

Ratkaistaan yhtälö laskentaohjelman yhtälönratkaisutoiminnolla.

$n = -12$ tai $n = 11$

Negatiivinen ratkaisu ei kelpaa järjestysluvuksi.

Luku 11 on positiivinen kokonaisluku, joten luku 133 on jonon 11. jäsen.

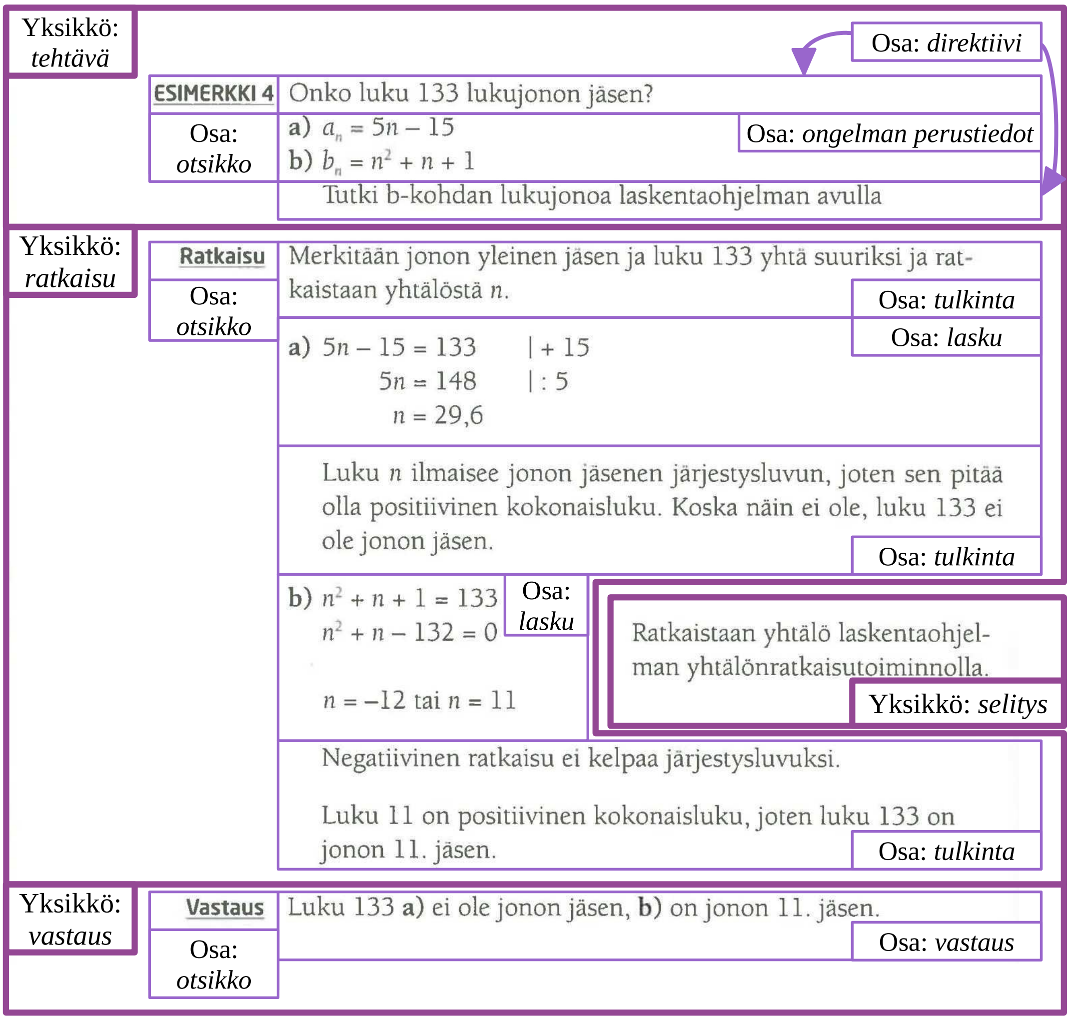
Vastaus Luku 133 **a)** ei ole jonon jäsen, **b)** on jonon 11. jäsen.

Avainkäsitteet:

- lukujono
- jonon jäsen eli termi
- jonon yleinen jäsen

104 Lukujono

Kuva 5. *Lukion yhteisen matematiikan* esimerkki 4 (s. 104) kontekstissaan.



Kaavio 5. *Lukion yhteisen matematiikan* esimerkin 4 (s. 104) yksiköt ja osat.

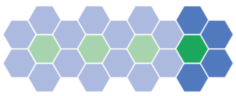
2.1 Lukujonon muodostaminen

JOHDANTO Kuviojono muodostuu tietyn säännön mukaan piirretyistä kuvioista.

kuvio 1 kuvio 2 kuvio 3

a) Piirrä kuviojonon seuraava eli neljäs kuvio.
b) Luettele kuviojonon viiden ensimmäisen kuvion sinisten kuusikulmioiden lukumäärät.
c) Kuinka monta sinistä kuusikulmiota on 10. kuviossa?

RATKAISU **a)** Neljäs kuvio saadaan lisäämällä edelliseen eli kolmanteen kuvioon yksi vihreä kuusikulmio ja neljä sinistä kuusikulmiota.



b) Ensimmäisessä kuviossa on kuusi sinistä kuusikulmiota. Seuraavissa kuvioissa niitä on aina neljä edellistä enemmän. Sinisten kuusikulmioiden lukumäärät ovat 6, 10, 14, 18 ja 22.

c) Kymmenennessä kuviossa on b-kohdan perusteella

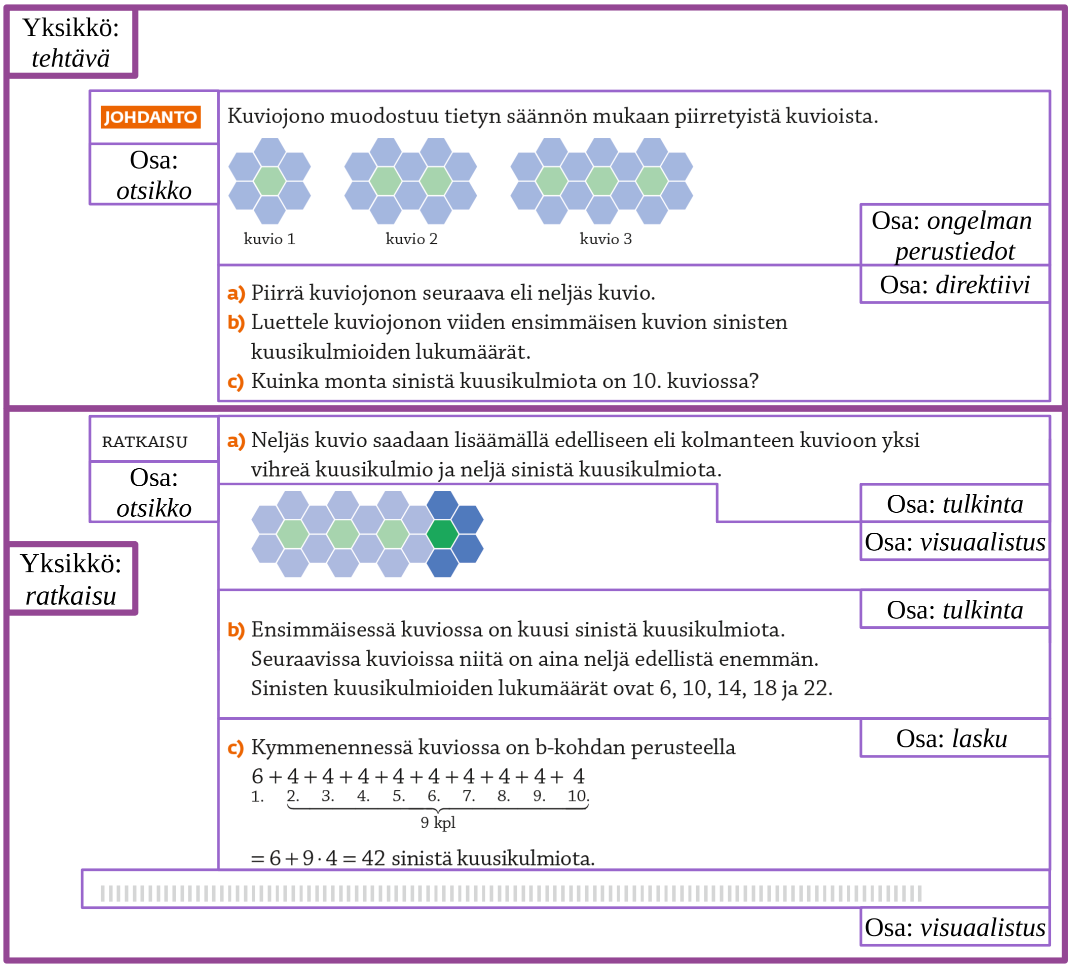
$$\underset{1.}{6}+\underbrace{\underset{2.}{4}+\underset{3.}{4}+\underset{4.}{4}+\underset{5.}{4}+\underset{6.}{4}+\underset{7.}{4}+\underset{8.}{4}+\underset{9.}{4}+\underset{10.}{4}}_{9\text{ kpl}}$$

$= 6 + 9 \cdot 4 = 42$ sinistä kuusikulmiota.

Johdannon kuviojonoa ja sinisten kuusikulmioiden lukumäärien luettelemista voitaisiin jatkaa loputtomiin. Tällaista tietyssä järjestyksessä olevien lukujen luetteloa kutsutaan **lukujonoksi**.

28

Kuva 6. *Otavan matematiikan* Johdanto-esimerkki (s. 28) kontekstissaan.



Kaavio 6. *Otavan matematiikan* Johdanto-esimerkin (s. 28) yksiköt ja osat.

Lukujono

Lukujono on järjestetty ja päättymätön luettelo reaalilukuja. Lukujonon lukuja kutsutaan **jäseniksi**.

$\underbrace{1,\ 3,\ 5,\ \ldots}_{\text{lukujono}}$ kolmas jäsen

Lukujonoja ovat esimerkiksi
- parittomat luonnolliset luvut 1, 3, 5, 7, ...
- vuorotteleva lukujono 1, 0, 1, 0, 1, 0, ...
- vakiojono –2, –2, –2, –2, ...
- jono $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$
- luvun π numeroiden jono 3, 1, 4, 1, 5, 9, ...

! Kolme pistettä luettelon perässä kuvaa sitä, että lukujono ei pääty, vaan lukujonon jäseniä voidaan kirjoittaa lisää.

ESIMERKKI 1 Jatka lukujonoa kolmella jäsenellä.

a) 2, 4, 6, ... **b)** –1, –3, –5, ... **c)** π, π, π, ... **d)** $\frac{1}{2}, 1, 1\frac{1}{2}, 2, \ldots$

RATKAISU

a) Lukujono 2, 4, 6, ... näyttää muodostuvan suuruusjärjestyksessä olevista parillisista luonnollisista luvuista. Lukujono on 2, 4, 6, 8, 10, 12, ...

b) Lukujono –1, –3, –5, ... näyttää muodostuvan parittomista, negatiivisista kokonaisluvuista, jotka on lueteltu suuruusjärjestyksessä suurimmasta alkaen. Lukujono on –1, –3, –5, –7, –9, –11, ...

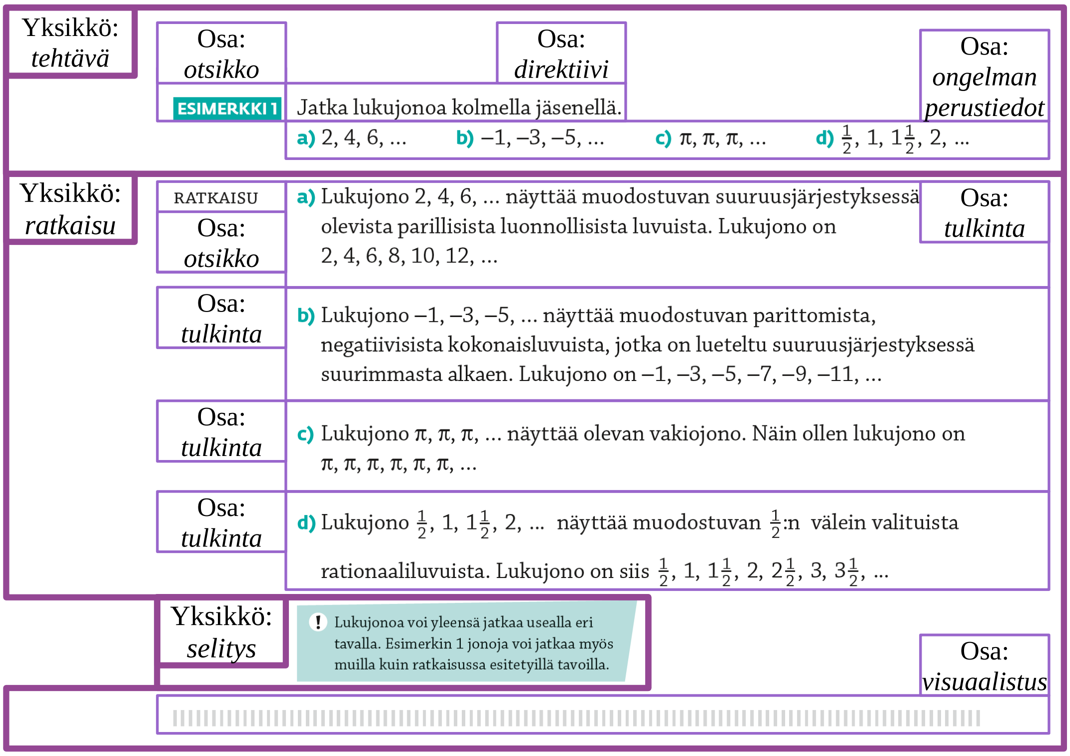
c) Lukujono π, π, π, ... näyttää olevan vakiojono. Näin ollen lukujono on π, π, π, π, π, π, ...

d) Lukujono $\frac{1}{2}, 1, 1\frac{1}{2}, 2, \ldots$ näyttää muodostuvan $\frac{1}{2}$:n välein valituista rationaaliluvuista. Lukujono on siis $\frac{1}{2}, 1, 1\frac{1}{2}, 2, 2\frac{1}{2}, 3, 3\frac{1}{2}, \ldots$

! Lukujonoa voi yleensä jatkaa usealla eri tavalla. Esimerkin 1 jonoja voi jatkaa myös muilla kuin ratkaisussa esitetyillä tavoilla.

2. LUKUJONOT *Lukujonon muodostaminen* 29

Kuva 7. *Otavan matematiikan* esimerkki 1 (s. 29) kontekstissaan.



Kaavio 7. *Otavan matematiikan* esimerkin 1 (s. 29) yksiköt ja osat.

ESIMERKKI 2 Lukujono on –3, –1, 1, 3, 5, ... Määritä lukujonon

a) 9. jäsen

b) 100. jäsen

c) sanallinen sääntö, jolla voidaan laskea mikä tahansa jäsen.

RATKAISU **a)** Eräs tapa jatkaa lukujonoa on lisätä edelliseen jäseneen luku 2.

$$\underset{\text{1. jäsen}}{-3} \xrightarrow{+2} \underset{\text{2. jäsen}}{-1} \xrightarrow{+2} \underset{\text{3. jäsen}}{1} \xrightarrow{+2} \underset{\text{4. jäsen}}{3} \xrightarrow{+2} \underset{\text{5. jäsen}}{5} \ldots$$

Lukujonon yhdeksän ensimmäistä jäsentä ovat tällöin –3, –1, 1, 3, 5, 7, 9, 11 ja 13. Lukujonon 9. jäsen on 13.

b) Lukujonon toinen jäsen saadaan lisäämällä ensimmäiseen jäseneen –3 yhden kerran luku 2.
Kolmas jäsen saadaan lisäämällä ensimmäiseen jäseneen –3 kaksi kertaa luku 2.
Neljäs jäsen saadaan lisäämällä ensimmäiseen jäseneen –3 kolme kertaa luku 2.

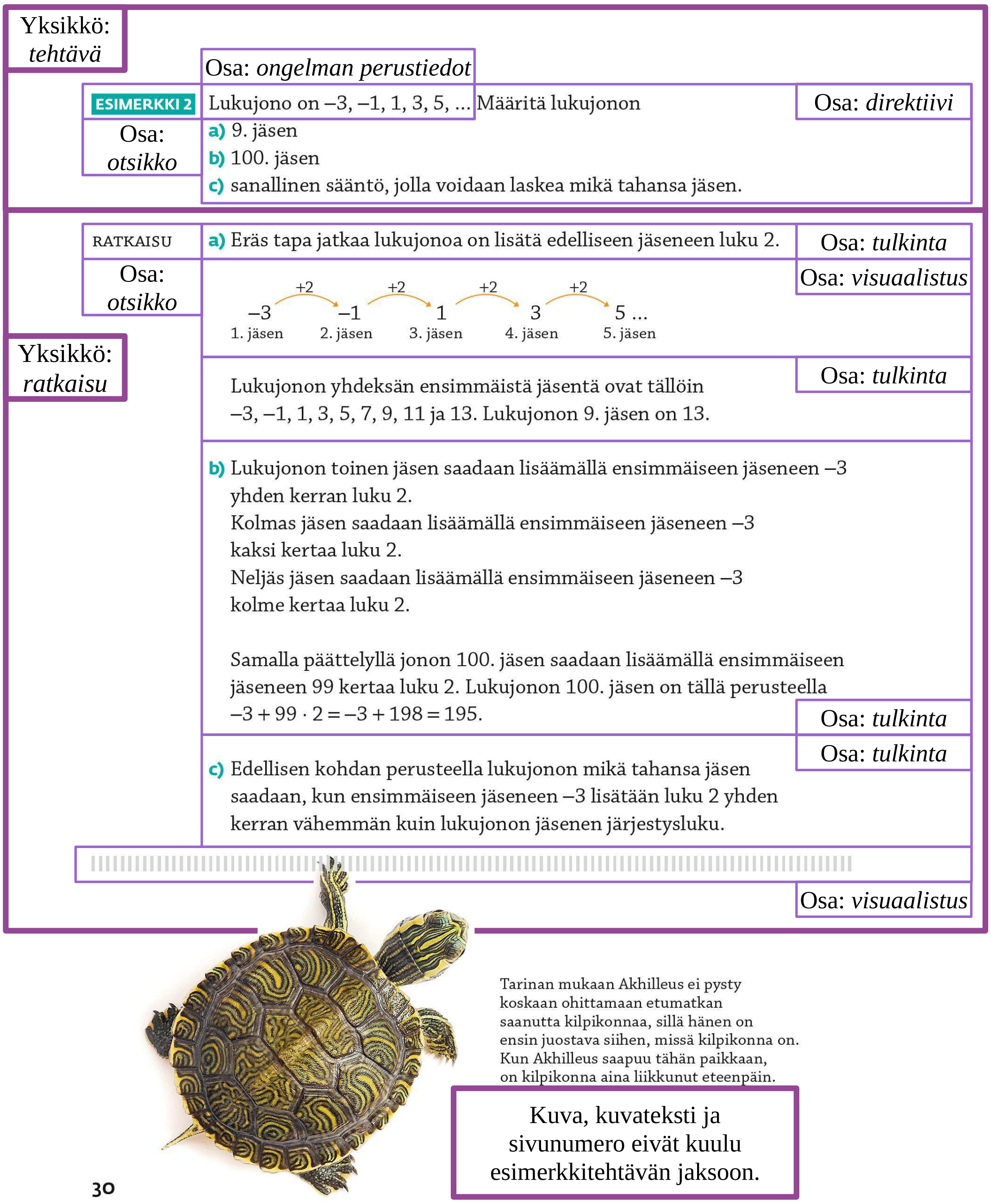
Samalla päättelyllä jonon 100. jäsen saadaan lisäämällä ensimmäiseen jäseneen 99 kertaa luku 2. Lukujonon 100. jäsen on tällä perusteella $-3 + 99 \cdot 2 = -3 + 198 = 195$.

c) Edellisen kohdan perusteella lukujonon mikä tahansa jäsen saadaan, kun ensimmäiseen jäseneen –3 lisätään luku 2 yhden kerran vähemmän kuin lukujonon jäsenen järjestysluku.

Tarinan mukaan Akhilleus ei pysty koskaan ohittamaan etumatkan saanutta kilpikonnaa, sillä hänen on ensin juostava siihen, missä kilpikonna on. Kun Akhilleus saapuu tähän paikkaan, on kilpikonna aina liikkunut eteenpäin.

30

Kuva 8. *Otavan matematiikan* esimerkki 2 (s. 30) kontekstissaan.


Yksikkö: *tehtävä*

Osa: *ongelman perustiedot*

ESIMERKKI 2 Lukujono on –3, –1, 1, 3, 5, … Määritä lukujonon

Osa: *direktiivi*

Osa: *otsikko*

a) 9. jäsen
b) 100. jäsen
c) sanallinen sääntö, jolla voidaan laskea mikä tahansa jäsen.

Yksikkö: *ratkaisu*

RATKAISU

Osa: *otsikko*

a) Eräs tapa jatkaa lukujonoa on lisätä edelliseen jäseneen luku 2.

Osa: *tulkinta*

Osa: *visuaalistus*

–3 (1. jäsen) +2 –1 (2. jäsen) +2 1 (3. jäsen) +2 3 (4. jäsen) +2 5 … (5. jäsen)

Osa: *tulkinta*

Lukujonon yhdeksän ensimmäistä jäsentä ovat tällöin –3, –1, 1, 3, 5, 7, 9, 11 ja 13. Lukujonon 9. jäsen on 13.

b) Lukujonon toinen jäsen saadaan lisäämällä ensimmäiseen jäseneen –3 yhden kerran luku 2.
Kolmas jäsen saadaan lisäämällä ensimmäiseen jäseneen –3 kaksi kertaa luku 2.
Neljäs jäsen saadaan lisäämällä ensimmäiseen jäseneen –3 kolme kertaa luku 2.

Samalla päättelyllä jonon 100. jäsen saadaan lisäämällä ensimmäiseen jäseneen 99 kertaa luku 2. Lukujonon 100. jäsen on tällä perusteella $-3 + 99 \cdot 2 = -3 + 198 = 195$.

Osa: *tulkinta*

Osa: *tulkinta*

c) Edellisen kohdan perusteella lukujonon mikä tahansa jäsen saadaan, kun ensimmäiseen jäseneen –3 lisätään luku 2 yhden kerran vähemmän kuin lukujonon jäsenen järjestysluku.

Osa: *visuaalistus*

Tarinan mukaan Akhilleus ei pysty koskaan ohittamaan etumatkan saanutta kilpikonnaa, sillä hänen on ensin juostava siihen, missä kilpikonna on. Kun Akhilleus saapuu tähän paikkaan, on kilpikonna aina liikkunut eteenpäin.

Kuva, kuvateksti ja sivunumero eivät kuulu esimerkkitehtävän jaksoon.

30

Kaavio 8. *Otavan matematiikan* esimerkin 2 (s. 30) yksiköt ja osat.

ESIMERKKI 3 Lukujonon ensimmäinen jäsen on $\frac{3}{4}$. Toisesta jäsenestä alkaen lukujonon jäsen saadaan vähentämällä edellisestä jäsenestä luku $\frac{1}{2}$.

a) Laske lukujonon viisi ensimmäistä jäsentä.

b) Kuinka monta positiivista jäsentä lukujonossa on?

RATKAISU **a)** Lasketaan lukujonon peräkkäisiä jäseniä säännön mukaisesti.

ensimmäinen jäsen	$\frac{3}{4}$
toinen jäsen	$\frac{3}{4} - {}^{2)}\frac{1}{2} = \frac{3}{4} - \frac{2}{4} = \frac{1}{4}$
kolmas jäsen	$\frac{1}{4} - \frac{2}{4} = -\frac{1}{4}$
neljäs jäsen	$-\frac{1}{4} - \frac{2}{4} = -\frac{3}{4}$
viides jäsen	$-\frac{3}{4} - \frac{2}{4} = -\frac{5}{4}$

! Toista jäsentä laskettaessa huomattiin, että $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$. Lukujonon jäsen voidaan siis laskea vähentämällä edellisestä jäsenestä luku $\frac{2}{4}$.

Lukujonon viisi ensimmäistä jäsentä ovat $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{4}$, $-\frac{1}{4}$, $-\frac{3}{4}$ ja $-\frac{5}{4}$.

b) Koska lukujonon jäsen saadaan vähentämällä edellisestä jäsenestä positiivinen luku $\frac{1}{2}$, jokainen uusi jäsen on aina edellistä pienempi.

Lukujonossa on näin ollen vain kaksi positiivista jäsentä, $\frac{3}{4}$ ja $\frac{1}{4}$.

Murtolukujen yhteen- ja vähennyslasku

Murtoluvut lavennetaan ensin samannimisiksi.

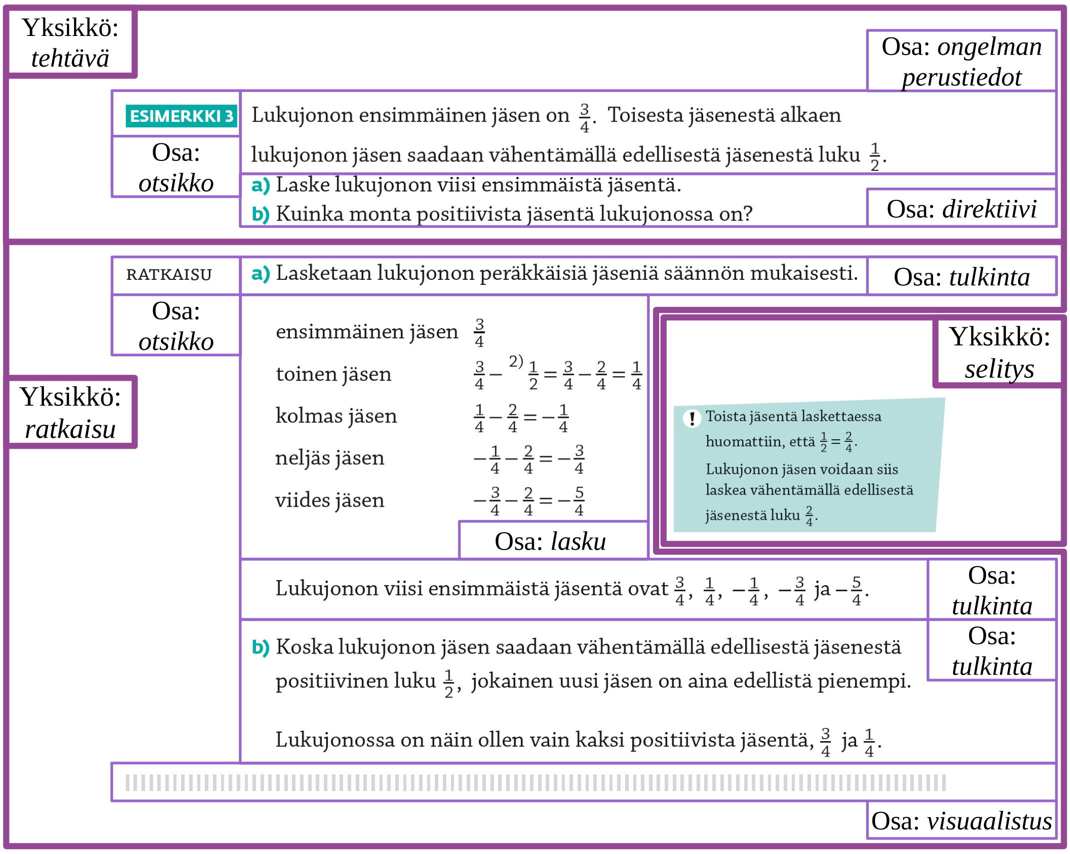
Esimerkiksi

$$^{2)}\frac{1}{3} + {}^{3)}\frac{1}{2} = \frac{2}{6} + \frac{3}{6} = \frac{2+3}{6} = \frac{5}{6}$$

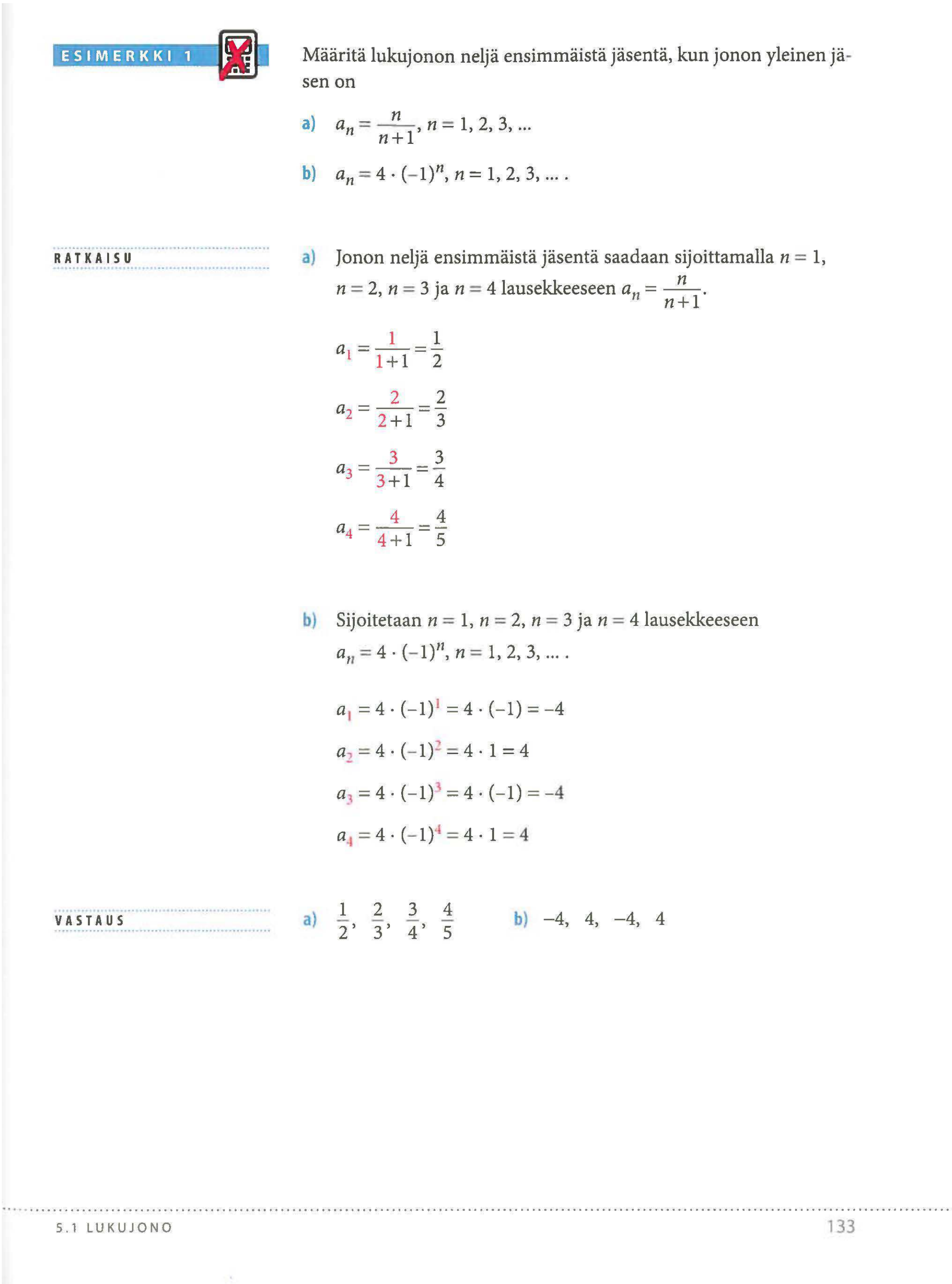
$$^{2)}\frac{5}{6} - {}^{3)}\frac{3}{4} = \frac{10}{12} - \frac{9}{12} = \frac{10-9}{12} = \frac{1}{12}$$

2. LUKUJONOT *Lukujonon muodostaminen* 31

Kuva 9. *Otavan matematiikan* esimerkki 3 (s. 31) kontekstissaan.



Kaavio 9. *Otavan matematiikan* esimerkin 3 (s. 31) yksiköt ja osat.



ESIMERKKI 1

Määritä lukujonon neljä ensimmäistä jäsentä, kun jonon yleinen jäsen on

a) $a_n = \frac{n}{n+1}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$

b) $a_n = 4 \cdot (-1)^n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$.

RATKAISU

a) Jonon neljä ensimmäistä jäsentä saadaan sijoittamalla $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$ ja $n = 4$ lausekkeeseen $a_n = \frac{n}{n+1}$.

$$a_1 = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

$$a_2 = \frac{2}{2+1} = \frac{2}{3}$$

$$a_3 = \frac{3}{3+1} = \frac{3}{4}$$

$$a_4 = \frac{4}{4+1} = \frac{4}{5}$$

b) Sijoitetaan $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$ ja $n = 4$ lausekkeeseen $a_n = 4 \cdot (-1)^n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$.

$$a_1 = 4 \cdot (-1)^1 = 4 \cdot (-1) = -4$$

$$a_2 = 4 \cdot (-1)^2 = 4 \cdot 1 = 4$$

$$a_3 = 4 \cdot (-1)^3 = 4 \cdot (-1) = -4$$

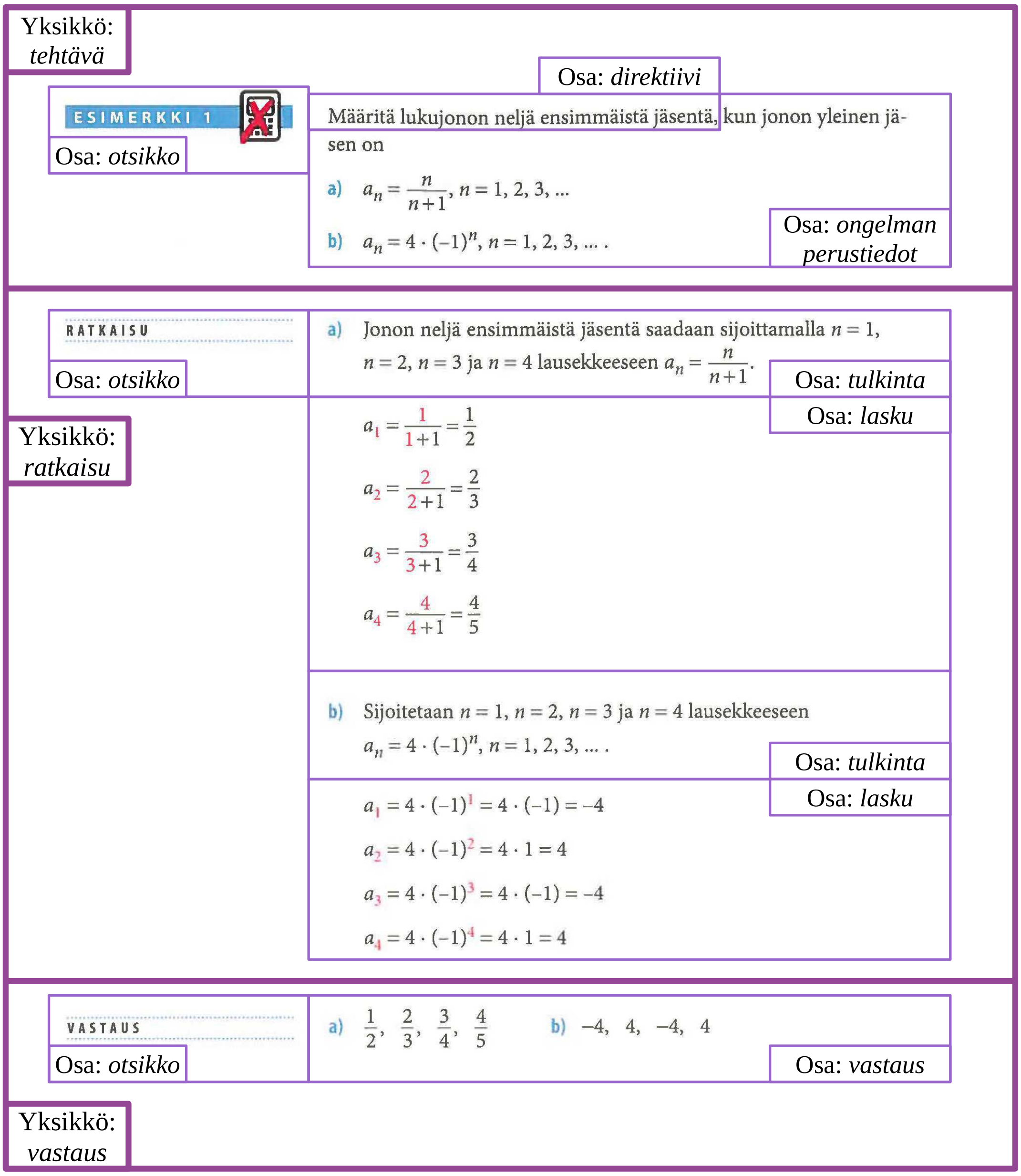
$$a_4 = 4 \cdot (-1)^4 = 4 \cdot 1 = 4$$

VASTAUS

a) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}$ b) $-4, 4, -4, 4$

5.1 LUKUJONO 133

Kuva 10. *Yhteisen tekijän* esimerkki 1 (s. 133) kontekstissaan.



Kaavio 10. *Yhteisen tekijä*n esimerkin 1 (s. 133) yksiköt ja osat.

ESIMERKKI 2

Tarkastellaan lukujonoa, jonka yleinen jäsen on $a_n = 2n - 5$, $n = 1, 2, 3, \ldots$.

a) Määritä lukujonon 60. jäsen.

b) Tutki, onko luku 46 lukujonon jäsen.

RATKAISU

a) Jonon 60. jäsen lasketaan sijoittamalla $n = 60$ yleisen jäsenen lausekkeeseen.

$$\begin{aligned} a_{60} &= 2 \cdot 60 - 5 && a_n = 2n - 5 \\ &= 120 - 5 \\ &= 115 \end{aligned}$$

b) Luku 46 on jonon jäsen, jos löytyy sellainen positiivinen kokonaisluku n, jolla $a_n = 46$. Muodostetaan ja ratkaistaan yhtälö.

$$\begin{aligned} a_n &= 46 && \text{Sijoitetaan } a_n = 2n - 5. \\ 2n - 5 &= 46 \\ 2n &= 51 \quad \mid :2 \\ n &= \frac{51}{2} = 25{,}5 \end{aligned}$$

Koska yhtälön ratkaisuna oleva luku 25,5 ei ole positiivinen kokonaisluku, luku 46 ei ole jonon jäsen.

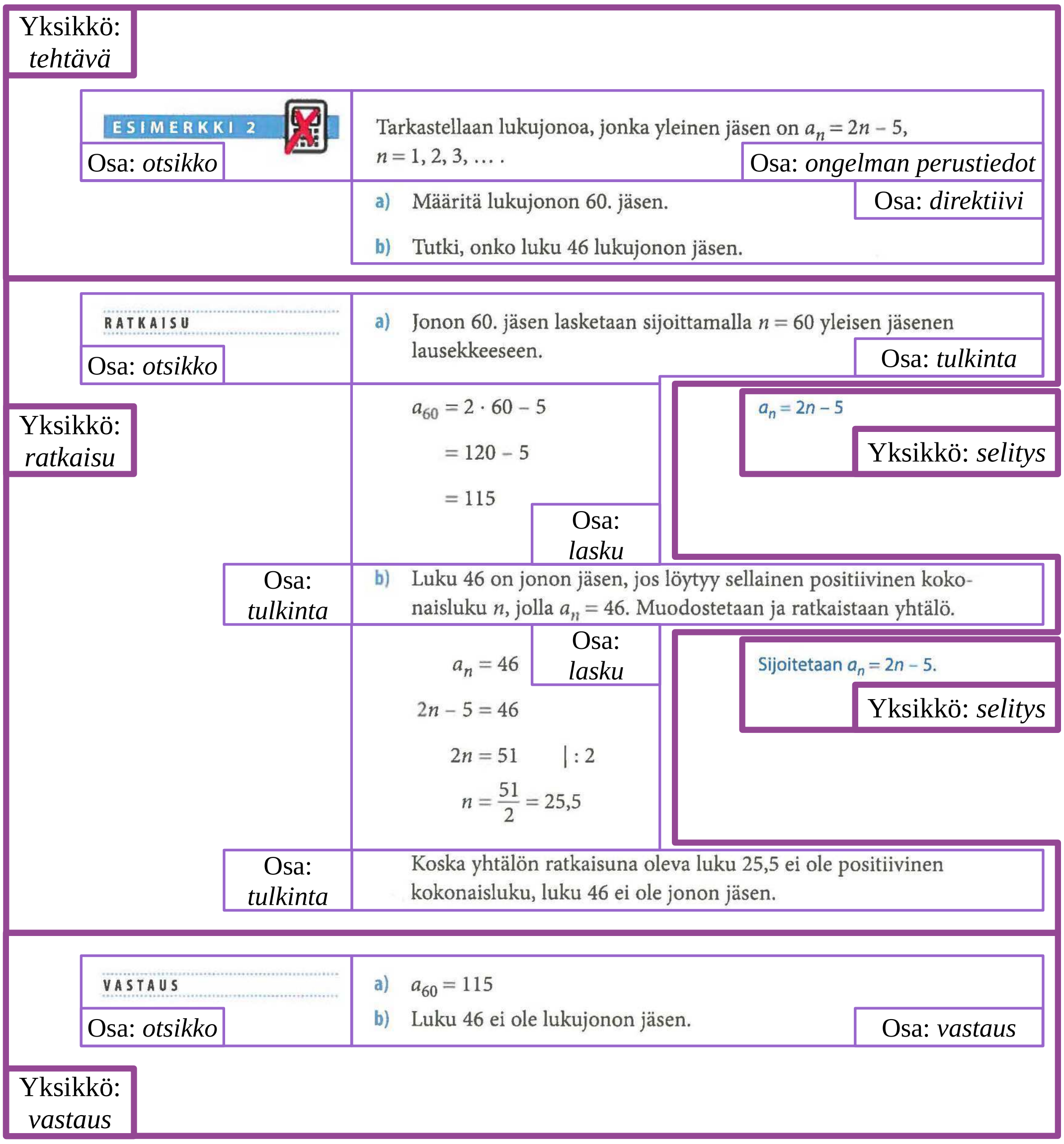
VASTAUS

a) $a_{60} = 115$

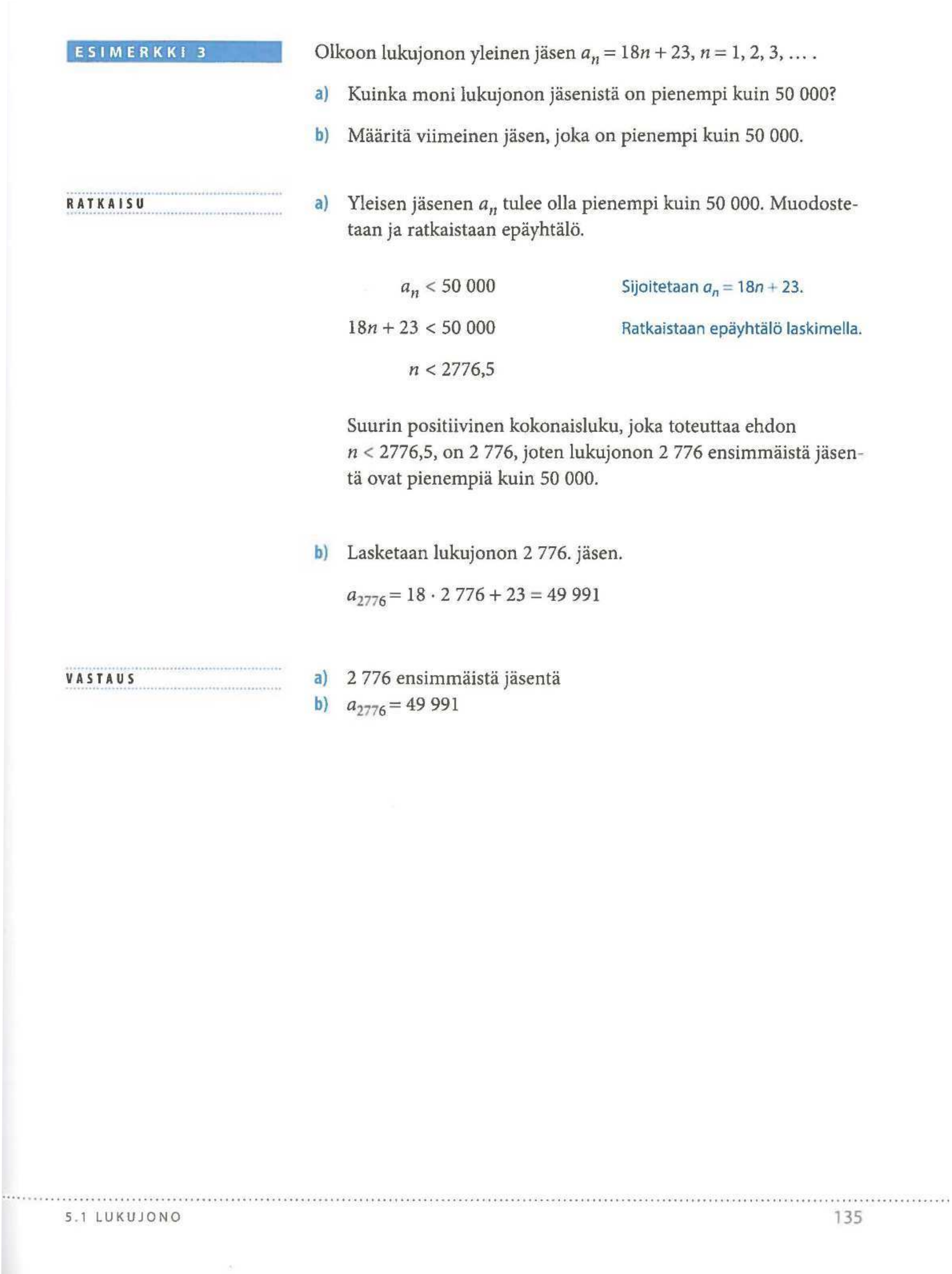
b) Luku 46 ei ole lukujonon jäsen.

134 5 LUKUJONOT JA SUMMAT

Kuva 11. *Yhteisen tekijän* esimerkki 2 (s. 134) kontekstissaan.



Kaavio 11. *Yhteisen tekijän* esimerkin 2 (s. 134) yksiköt ja osat.



ESIMERKKI 3

Olkoon lukujonon yleinen jäsen $a_n = 18n + 23$, $n = 1, 2, 3, \ldots$.

a) Kuinka moni lukujonon jäsenistä on pienempi kuin 50 000?

b) Määritä viimeinen jäsen, joka on pienempi kuin 50 000.

RATKAISU

a) Yleisen jäsenen a_n tulee olla pienempi kuin 50 000. Muodostetaan ja ratkaistaan epäyhtälö.

$$a_n < 50\,000$$ Sijoitetaan $a_n = 18n + 23$.

$$18n + 23 < 50\,000$$ Ratkaistaan epäyhtälö laskimella.

$$n < 2776{,}5$$

Suurin positiivinen kokonaisluku, joka toteuttaa ehdon $n < 2776{,}5$, on 2 776, joten lukujonon 2 776 ensimmäistä jäsentä ovat pienempiä kuin 50 000.

b) Lasketaan lukujonon 2 776. jäsen.

$$a_{2776} = 18 \cdot 2\,776 + 23 = 49\,991$$

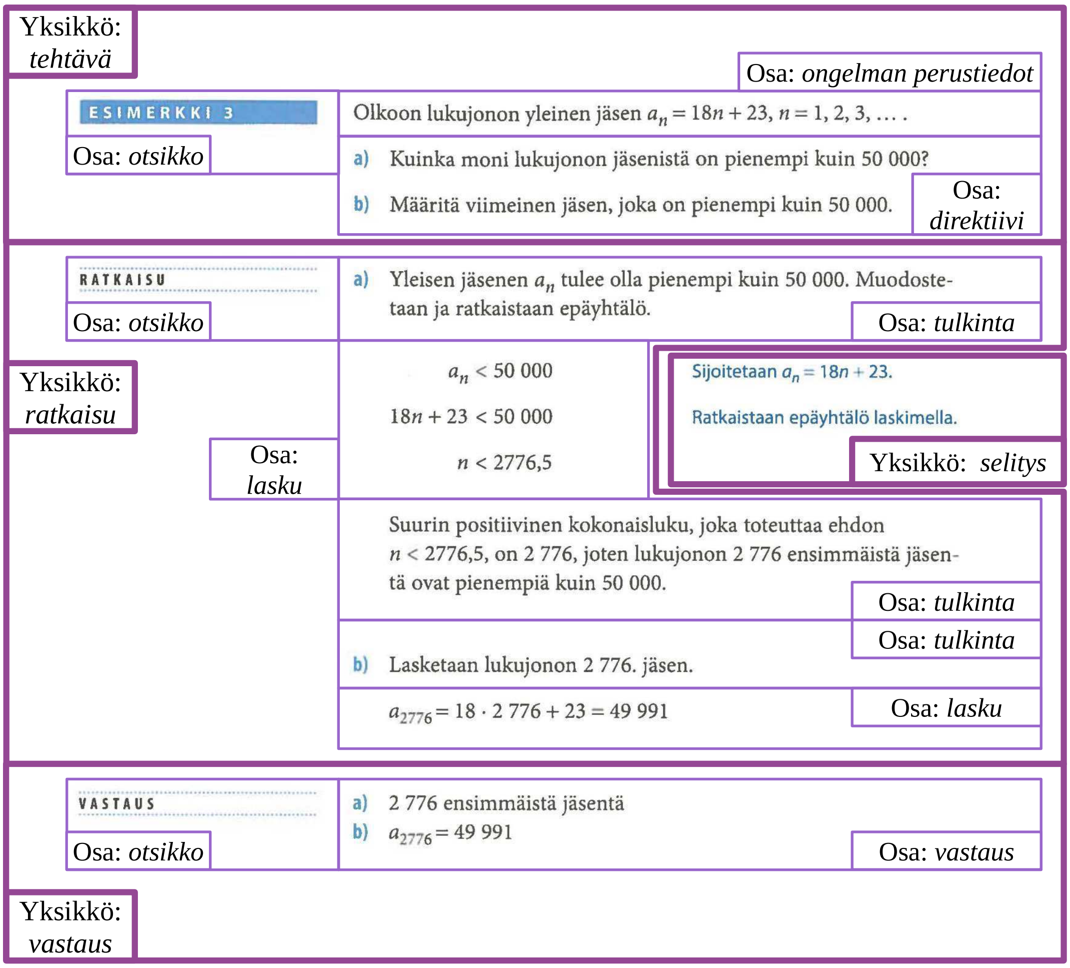
VASTAUS

a) 2 776 ensimmäistä jäsentä

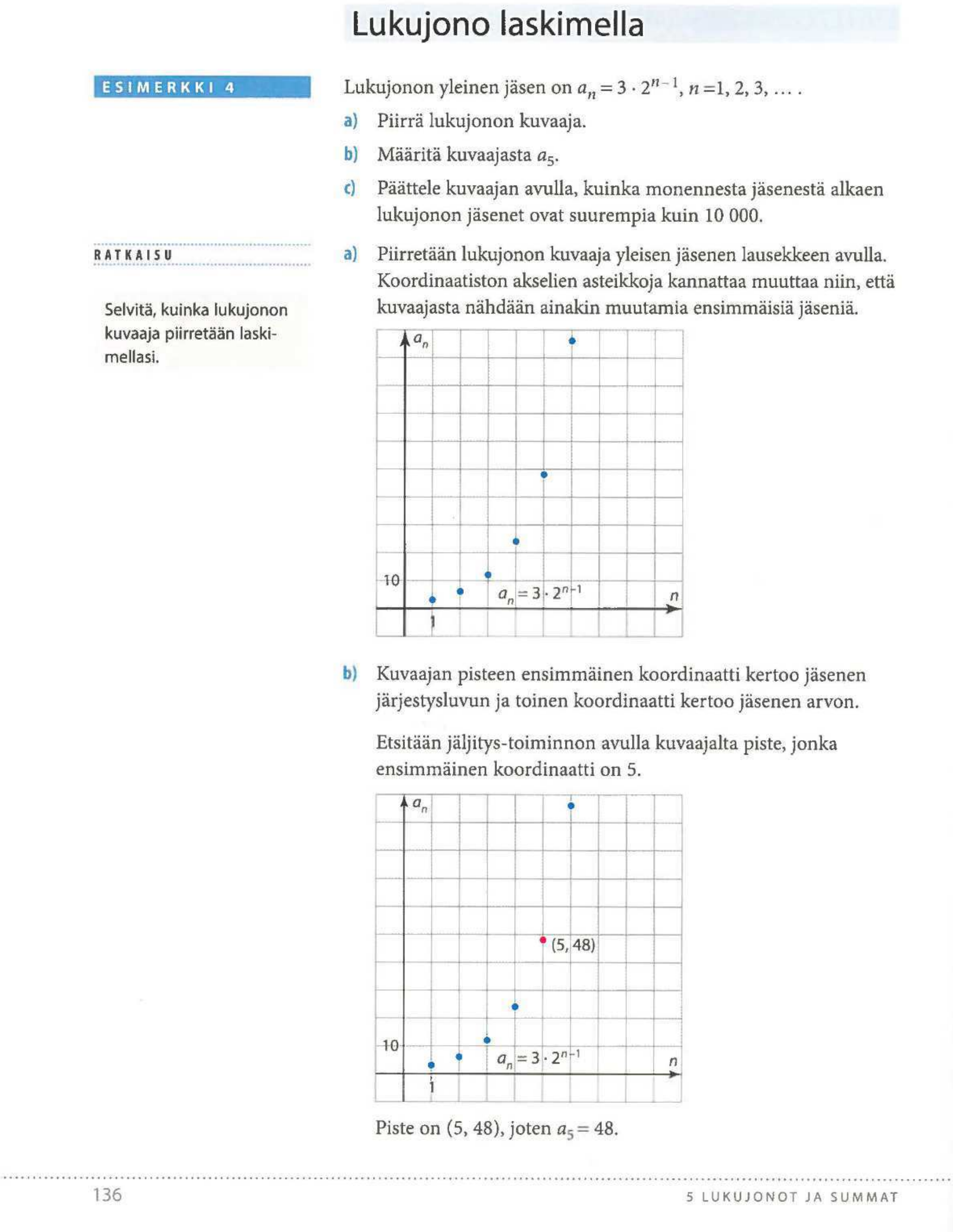
b) $a_{2776} = 49\,991$

5.1 LUKUJONO 135

Kuva 12. *Yhteisen tekijän* esimerkki 3 (s. 135) kontekstissaan.



Kaavio 12. *Yhteisen tekijän* esimerkin 3 (s. 135) yksiköt ja osat.



Lukujono laskimella

ESIMERKKI 4

Lukujonon yleinen jäsen on $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$.

a) Piirrä lukujonon kuvaaja.

b) Määritä kuvaajasta a_5.

c) Päättele kuvaajan avulla, kuinka monennesta jäsenestä alkaen lukujonon jäsenet ovat suurempia kuin 10 000.

RATKAISU

Selvitä, kuinka lukujonon kuvaaja piirretään laskimellasi.

a) Piirretään lukujonon kuvaaja yleisen jäsenen lausekkeen avulla. Koordinaatiston akselien asteikkoja kannattaa muuttaa niin, että kuvaajasta nähdään ainakin muutamia ensimmäisiä jäseniä.

a_n 10 1 n $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$

b) Kuvaajan pisteen ensimmäinen koordinaatti kertoo jäsenen järjestysluvun ja toinen koordinaatti kertoo jäsenen arvon.

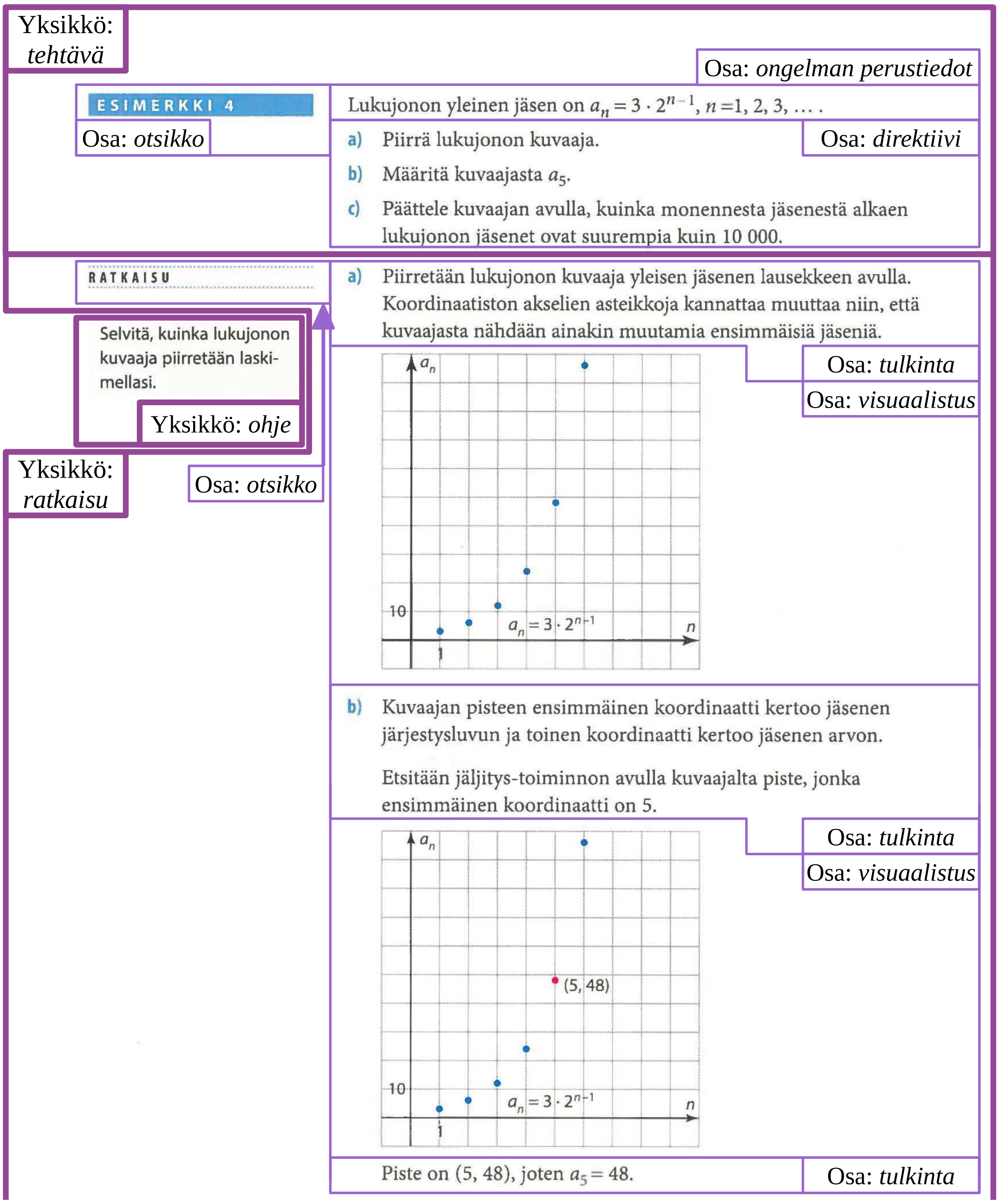
Etsitään jäljitys-toiminnon avulla kuvaajalta piste, jonka ensimmäinen koordinaatti on 5.

a_n (5, 48) 10 1 n $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$

Piste on (5, 48), joten $a_5 = 48$.

136 5 LUKUJONOT JA SUMMAT

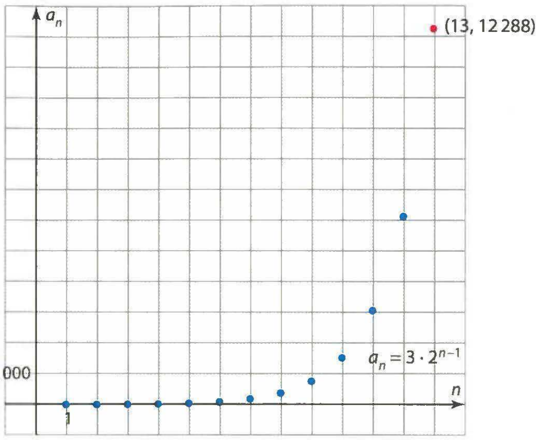
Kuva 13. *Yhteisen tekijän* esimerkin 4 alkupuoli (s. 136) kontekstissaan.



Kaavio 13. *Yhteisen tekijän* esimerkin 4 alkupuolen (s. 136) yksiköt ja osat.

c) Etsitään kuvaajalta piste, jonka toinen koordinaatti ylittää ensimmäisen kerran arvon 10 000.

Muuta akselien asteikkoja niin, että etsitty kuvaajan piste tulee näkyviin. Pystyakselin tulee siis näkyä ainakin arvoon 10 000 saakka.

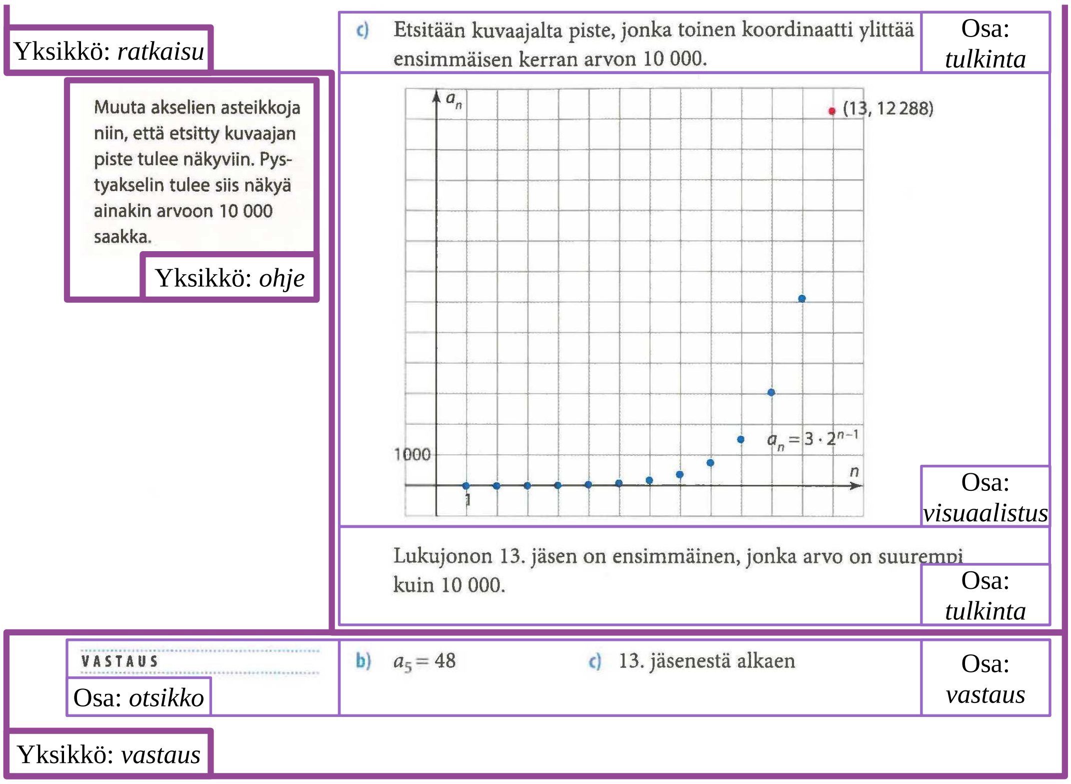


Lukujonon 13. jäsen on ensimmäinen, jonka arvo on suurempi kuin 10 000.

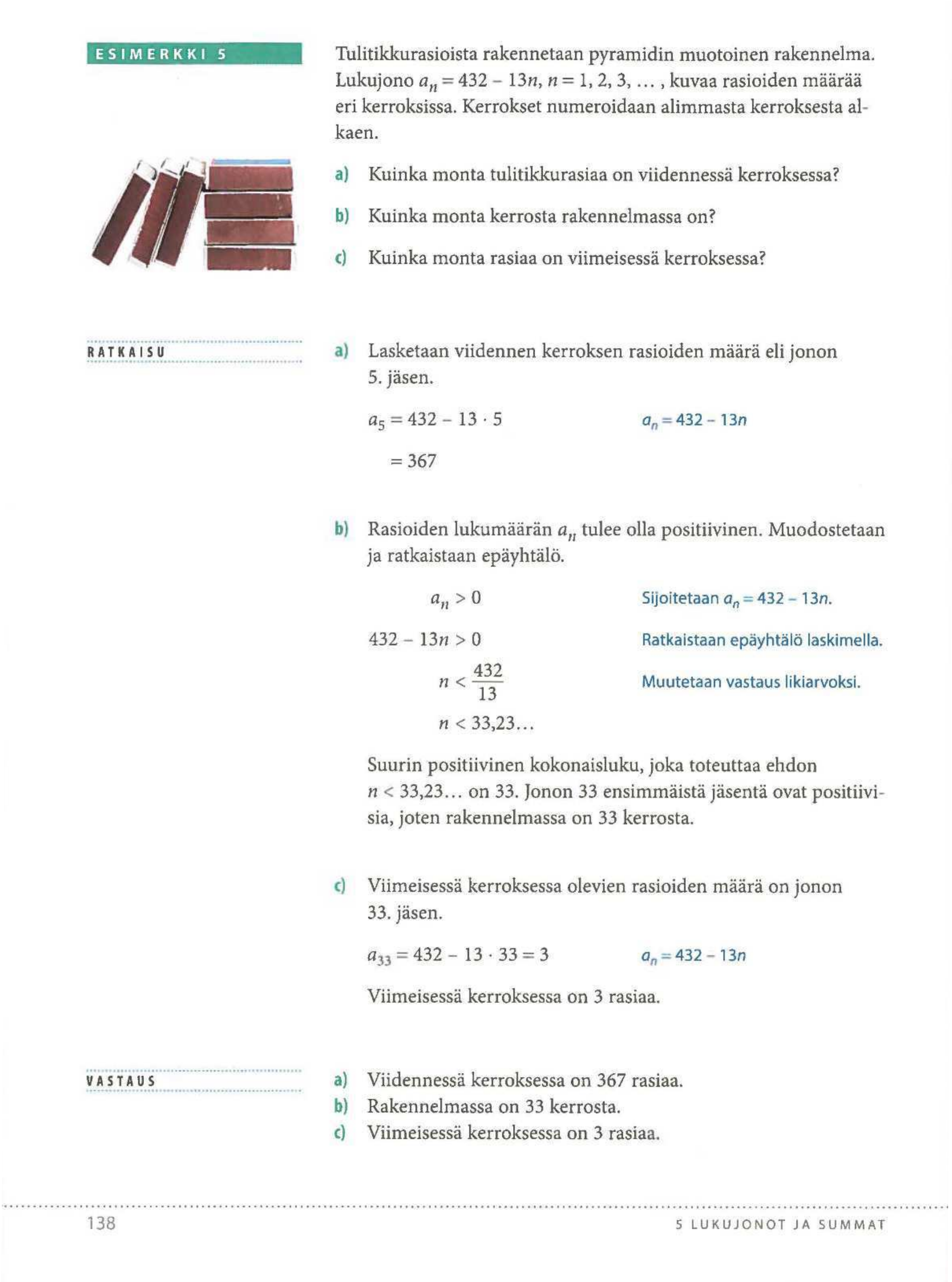
VASTAUS b) $a_5 = 48$ c) 13. jäsenestä alkaen

5.1 LUKUJONO 137

Kuva 14. *Yhteisen tekijän* esimerkin 4 loppupuoli (s. 137) kontekstissaan.



Kaavio 14. *Yhteisen tekijän* esimerkin 4 loppupuolen (s. 137) yksiköt ja osat.



ESIMERKKI 5

Tulitikkurasioista rakennetaan pyramidin muotoinen rakennelma. Lukujono $a_n = 432 - 13n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, kuvaa rasioiden määrää eri kerroksissa. Kerrokset numeroidaan alimmasta kerroksesta alkaen.

a) Kuinka monta tulitikkurasiaa on viidennessä kerroksessa?

b) Kuinka monta kerrosta rakennelmassa on?

c) Kuinka monta rasiaa on viimeisessä kerroksessa?

RATKAISU

a) Lasketaan viidennen kerroksen rasioiden määrä eli jonon 5. jäsen.

$$a_5 = 432 - 13 \cdot 5 = 367 \qquad a_n = 432 - 13n$$

b) Rasioiden lukumäärän a_n tulee olla positiivinen. Muodostetaan ja ratkaistaan epäyhtälö.

$$a_n > 0 \qquad \text{Sijoitetaan } a_n = 432 - 13n.$$

$$432 - 13n > 0 \qquad \text{Ratkaistaan epäyhtälö laskimella.}$$

$$n < \frac{432}{13} \qquad \text{Muutetaan vastaus likiarvoksi.}$$

$$n < 33{,}23\ldots$$

Suurin positiivinen kokonaisluku, joka toteuttaa ehdon $n < 33{,}23\ldots$ on 33. Jonon 33 ensimmäistä jäsentä ovat positiivisia, joten rakennelmassa on 33 kerrosta.

c) Viimeisessä kerroksessa olevien rasioiden määrä on jonon 33. jäsen.

$$a_{33} = 432 - 13 \cdot 33 = 3 \qquad a_n = 432 - 13n$$

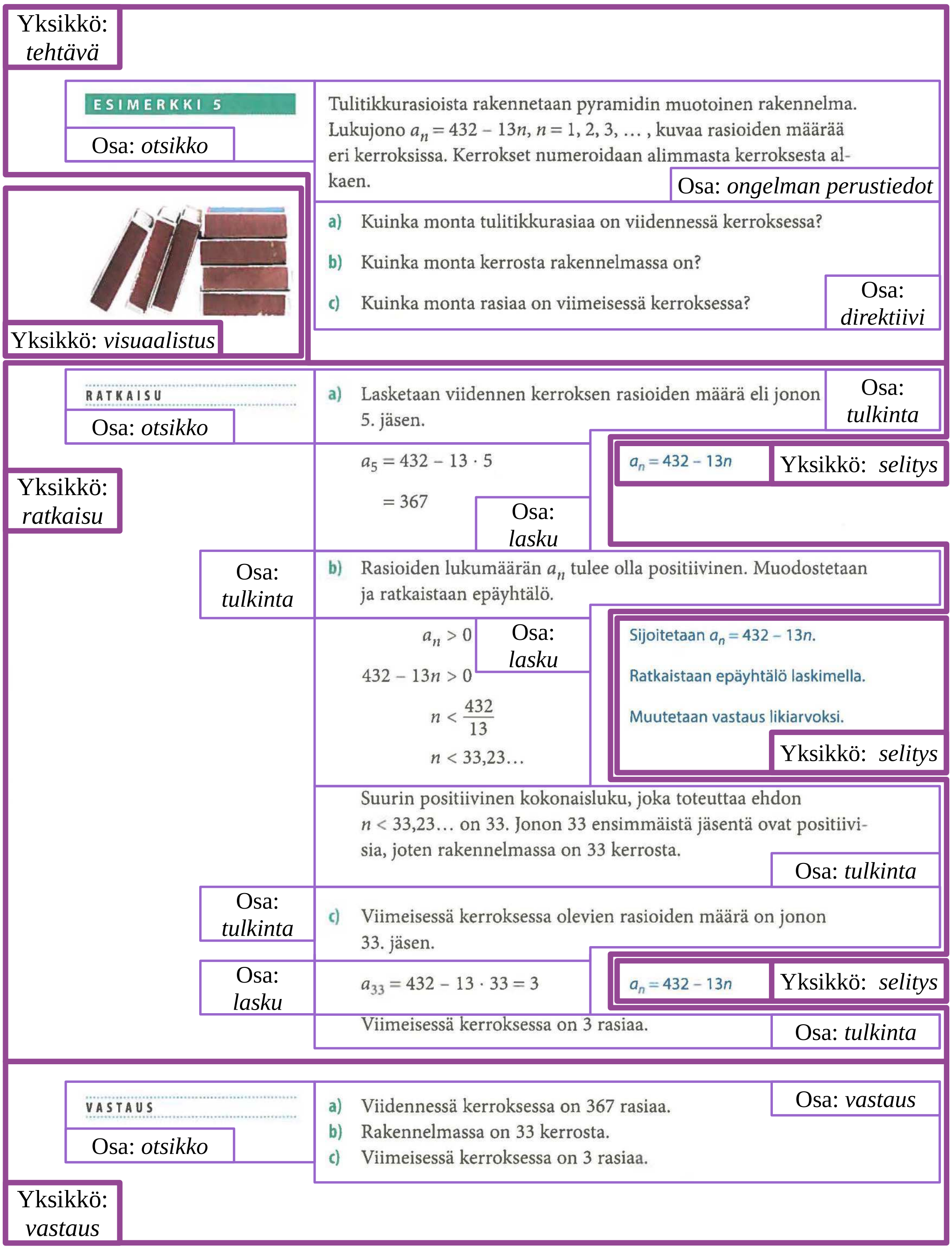
Viimeisessä kerroksessa on 3 rasiaa.

VASTAUS

a) Viidennessä kerroksessa on 367 rasiaa.
b) Rakennelmassa on 33 kerrosta.
c) Viimeisessä kerroksessa on 3 rasiaa.

138 5 LUKUJONOT JA SUMMAT

Kuva 15. *Yhteisen tekijän* esimerkki 5 (s. 138) kontekstissaan.



Kaavio 15. *Yhteisen tekijän* esimerkin 5 (s. 138) yksiköt ja osat.